三段論法のグラフ理論的考察

硲　文夫*

Graph-theoretical Approach to Syllogism

HAZAMA Fumio*

Abstract

The main purpose of this article is to propose a graph-theoretical method to test the validity of categorical syllogisms. The method is shown to surpass in simplicity the traditional Venn- diagrammatic one, and enables us to classify all the valid syllogisms in elementary and unified way.

キーワード：三段論法，ベン図，グラフ，付値

Keywords：syllogism，Venn diagram，graph，valuation

1．はじめに

三段論法の例としてしばしば挙げられるのは

「人間は死すべきものである．

ソクラテスは人間である．

したがってソクラテスは死すべきものである．」

という推論だが，実はアリストテレスが徹底的に研究し，そして分類した三段論法は，この例の型に留まらない，広汎な論法を視野に入れている．だからこそ，彼の体系が中世のみならず現代でも「アリストテレス論理学」あるいは「伝統的論理学」と称され，標準的な論理の体系として価値を持ち続け，例えば教科書[1]においても第 4 章，第 5 章全体がその解説に当てられているのである．

しかし，そこでも用いられているベン図による分析法は，論法の視覚化にある程度成功してはいるものの，初学者にとって理解しやすいとは言い難い．本論文は「グラフ」を用いた簡明な分析法を提案し，この方法が論理の可視化のみならず，計算機による妥当性の自動判定も可能にすることを論述する．

2．定言命題と定言三段論法

「定言三段論法（syllogism）」とは，2 つの仮定（premise）と 1 つの結論（conclusion）から成り，それぞれが「定言命題」と呼ばれる次の 4 つの型のうちの 1 つの型を持つものを言う：

表 1．定言命題の型

型の名前	命題	略記法
A	すべての S は P である	$A(S,P)$
E	すべての S は P でない	$E(S,P)$
I	ある S は P である	$I(S,P)$
O	ある S は P でない	$O(S,P)$

ここで「A，E，I，O」は伝統的にこれら 4 つの型につけられた名前である．このうち型(A)と(E)の命題は「すべての」ものに対する主張であることから「普遍命題」，型(I)と(O)の命題は「ある」ものに対する主張であることから「特称命題」と呼ばれる．

三段論法においては，例えば

＊理工学部理学系教授　Professor, Division of Science, School of Science and Engineering

$$\begin{array}{ll} (p_1) & \textbf{すべての馬は動物である} \\ (p_2) & \textbf{ある犬は馬でない} \\ \hline (con) & \textbf{ある犬は動物でない} \end{array}$$

というように，第一の仮定を(p_1)，第二の仮定を(p_2)，結論を(con)と名付けて，(p_2)と(con)の間に横棒を引いて表す．そしてこの例のように，3 つの項「馬，動物，犬」がそれぞれ 2 回ずつ現れるもののみを考察する．また結論の主語の項を「S（Subject）」，結論の述語の項を「P（Predicate）」，2 つの仮定の両方に現れる項を「M（Middle term）」と呼ぶ慣わしである．したがってこの例では

$S=$ 犬，$P=$ 動物，$M=$ 馬

ということになり，先の型の記号を用いて

$$\begin{array}{ll} (p_1) & A(M,P) \\ (p_2) & O(S,M) \\ \hline (con) & O(S,P) \end{array}$$

と表すことができる．そして(p_1)，(p_2)，(con)の型の名前を順に並べて三段論法の「型」と称する．したがってこの例の論法は「AOO-型」である．

また「P」と「S」は，それぞれがどちらかの仮定に 1 回ずつ現れることになるが，仮定の順番は入れ替えても妥当性に影響しないから，

P は第一の仮定(p_1)に現れ，

S は第二の仮定(p_2)に現れる

ものとする．あとは「M」が二つの仮定の中で占める場所が次のように 4 通りあり，

表 2．三段論法の格

主 述	主 述	主 述	主 述
M P	P M	M P	P M
S M	S M	M S	M S
S P	S P	S P	S P

左から「第 1 格」，「第 2 格」，「第 3 格」，「第 4 格」と呼ぶ．上の例は，したがって第 1 格であり，型と格を合わせて「AOO-1」と呼ぶ慣わしである．

このように定言三段論法においては，型「XYZ-n」の「X, Y, Z」のそれぞれに「A, E, I, O」の 4 通りのどれかが入り，「n」のところに 1 から 4 の 4 通りのどれかが入るから，全体で $4^4 = 256$ 通りの論法がある．この中から妥当な推論を取り出すことが伝統的論理学の重要な課題なのである．

3．ベン図を用いた分析

本節では，定言三段論法の妥当性の判定法として，「ベン図（Venn diagram）」を用いる方法を紹介する．これは前に引用した教科書でも解説されており，現在最も標準的とされている方法である．

3.1. 定言命題とベン図

型(I)の

「ある S は P である」

については，

「S と P の両方の性質を持つものがある」

と言い換えられる．したがって S と P の共通部分に何かがあるという意味で「X」を書き込む：

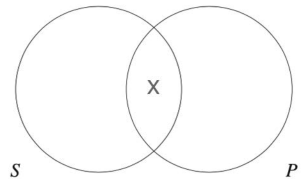


図 1． $I(S,P)$

同様に型(O)の

「ある S は P でない」

については

「P の外側に S の性質を持つものがある」

と言い換えられるから，S の内側で P の外側の部分に「X」を書き込む：

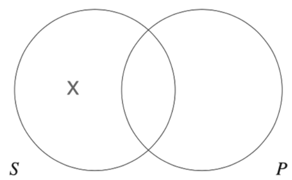


図 2． $O(S,P)$

型(A)の

「すべての S は P である」

については，これを否定すると

「ある S は P でない」

ということになり，(O)と同じになる．したがってもとの(A)は図 2 の「X」が書き込まれた領域には元が一つもない，という主張であり，そのことを示

すためにその領域全体に線を引く：

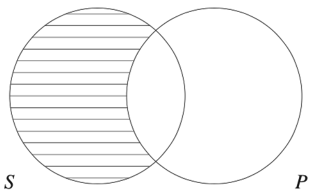


図 3. $A(S,P)$

最後に(E)の

「すべての S は P でない」

については，これを否定すると

「ある S は P である」

ということになり，(I)と同じになる．したがってもとの(E)は図 1 の「X」が書き込まれた領域には元が 1 つもない，ということだからそこに線を引く：

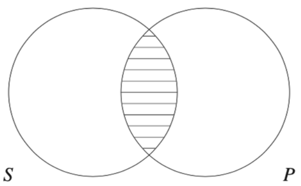


図 4. $E(S,P)$

このように特称命題には元が存在するという意味の「X」が一つ現れ，普遍命題には元が存在しないという意味の「線」が現れる，という特徴がある．

3.2. 三段論法とベン図

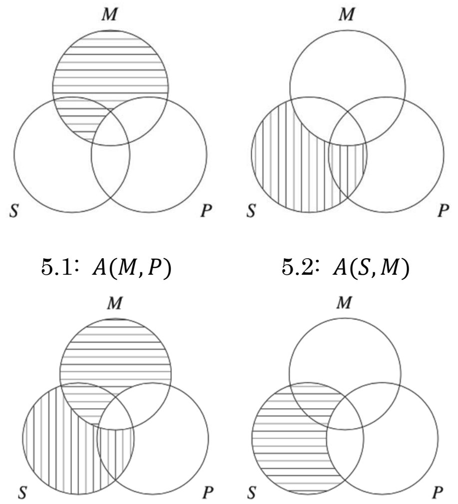
いくつかの例を通して，ベン図によって三段論法の妥当性を吟味する方法を解説する．

例 1. 「AAA-1」

これは

$$\begin{array}{ll} (p_1) & A(M,P) \\ (p_2) & A(S,M) \\ \hline (con) & A(S,P) \end{array}$$

という推論であった．それぞれの命題を 3.1 項で述べたルールに従って図示すると次のようになる：



5.1: $A(M,P)$　5.2: $A(S,M)$

5.3: $A(M,P)$ と $A(S,M)$　5.4: $A(S,P)$

図 5. AAA-1 **のベン図**

図 5.1 と図 5.2 を合わせると，図 5.3 の線の部分には元は存在しない．一方結論の図 5.4 の線の部分は図 5.3 の線の部分に完全に含まれているから，図 5.4 の線の部分にも元は存在しない．したがってこれは妥当な推論である，ということがわかる．

例 2. 「IAI-4」

これは

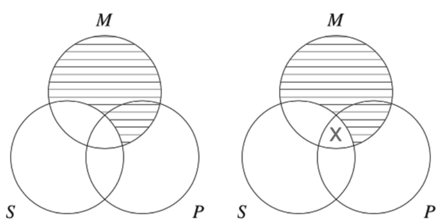
$$\begin{array}{ll} (p_1) & I(P,M) \\ (p_2) & A(M,S) \\ \hline (con) & I(S,P) \end{array}$$

という推論である．この例のように，二つの仮定に特称命題と普遍命題の両方が現れる時は

「普遍命題の方の線から書き入れ，

あとで特称命題に対応する X を書き入れる」

というルールに従う．ここに注意してそれぞれの命題を 3.1 項で述べたルールに従って図示すると次のようになる：



6.1: $A(M,S)$　6.2: $I(P,M)$

図 6. IAI-4 **のベン図**

上のルールに従って，先に普遍命題の $A(M,S)$ を書き入れたのが図 6.1 である．そのあと特称命題 $I(P,M)$ に対応する X を P と M の共通部分に書き入れるのだが，線が引かれている領域には元が存在しないのだから，図 6.2 のように X を書き入れるしかない．するとこの X は S と P の共通部分に入るから結論の $I(S,P)$ が正しい，ということがわかる．

次節では，本論文の眼目である「グラフを用いた三段論法の判定法」を紹介し，それがベン図を用いる方法よりもはるかに簡明であり，しかも妥当な論法をグラフを眺めるだけで取り出せる，ということを立証したい．

4．ベン図からグラフへ

前節で用いた「S，M，P」の三つの円から成るベン図は 7 つの小領域に分かれている．そのそれぞれの小領域に点を打ち，円周を 1 回だけまたいで行ける点同士を辺で結ぶと，次のような図ができる：

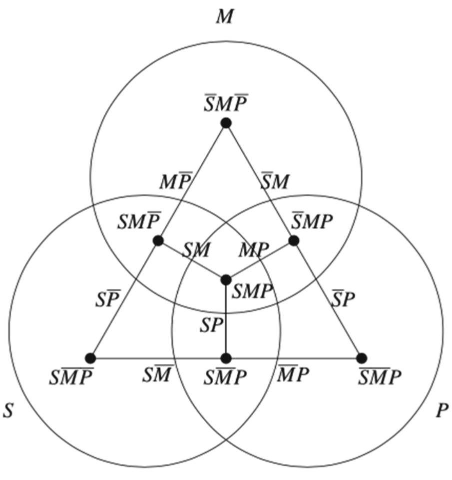


図 7．グラフ G_{smp}

そして各点に

S の内側なら「S」，外側なら「$\bar{S}$」
M の内側なら「M」，外側なら「$\bar{M}$」
P の内側なら「P」，外側なら「$\bar{P}$」

を使って S，M，P を並べた名前をつける．例えば三つの円全部の共通部分のところの点は S，M，P すべての内側にあるから「SMP」になる．また左下の点は，S の内側，M，P の外側だから「$S\bar{M}\bar{P}$」になる．

また，辺全体を含む最小の集合をその辺の名前とする．例えば点「$S\bar{M}\bar{P}$」と点「$SM\bar{P}$」を結ぶ辺は「S の内側で P の外側」にあるから「$S\bar{P}(=S\cap\bar{P}$」になる．以下このように点と辺に名前をつけたグラフを「G_{smp}」と呼ぶ．

次にグラフ G_{smp} の要素の名前を次のように付け替えて G_{num} と呼ぶ：

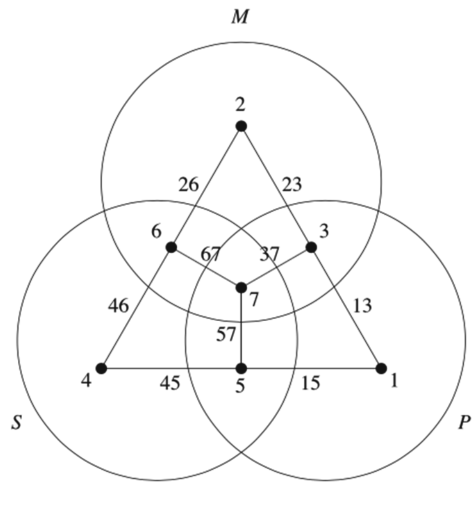


図 8．グラフ G_{num}

このグラフ G_{num} が三段論法の分析に決定的な役割を果たすことになる．また，各要素は場当たり的に名付けたのではなく，以下のルールに基づいている．例えば図 7 の左下の点「$S\bar{M}\bar{P}$」は，S，M，P のそれぞれに属するかどうかを順にみていくと

「S に属する」→「真」→「1」
「M に属する」→「偽」→「0」
「P に属する」→「偽」→「0」

となっており，その真理値を並べると「100」である．これを二進表示とみて十進表示に直すと「4」になるから，

「$S\bar{M}\bar{P}$」→「4」

とするのである．一方辺の名前は

「m と n を結ぶ辺は mn」

というだけの単純なルールによる．

5．定言命題と付値

本節では S，M，P を用いた定言命題が与えられた時に，G_{num} の辺と点に 0 か 1 の値を対応させるルール「付値」（記号は $v(\cdot)$）を解説する．

一言で言えば

「辺あるいは点に対応する領域に,

一つも元がなければ 0,

少なくとも一つ元があるときは 1」

とするのである.以下定言命題の 4 つの型それぞれについて説明していこう.

5.1. (A) -型の定言命題

これは

$A(S,P)$:「すべての S は P である」

というものだが,図 3 で見たように,S の内側の部分のうち P の外側には元が存在しない,ことを主張している.これは集合の記号で書けば

$S\bar{P}$(＝$S\cap\bar{P}$)＝ ϕ(空集合)

ということだから,辺$S\bar{P}$すなわち辺 46 に付与される値を 0 とする:

$$v(46)=0 \tag{5.1}$$

となる.このとき,点「4」,点「6」に対応する領域にも元は一つも存在しないので必然的に

$$v(4)=0 \text{ かつ } v(6)=0 \tag{5.2}$$

となる.

5.2. (E) -型の定言命題

これは

$E(S,P)$:「すべての S は P でない」

というものだが,これは集合の記号で書けば

SP(＝$S\cap P$)＝ ϕ

ということで,辺 SP すなわち辺 57 につけられる付値は 0 となる:

$$v(57)=0 \tag{5.3}$$

したがって必然的に

$$v(5)=0 \text{ かつ } v(7)=0 \tag{5.4}$$

となる.

5.3. (I) -型の定言命題

これは

$I(S,P)$:「ある S は P である」

というものだが,図 1 で見たように,S と P の共通部分に少なくとも一つの元が存在する,ことを主張している.これは集合の記号で書けば

SP(＝$S\cap P$)≠ ϕ

ということで,辺SPすなわち辺 57 につけられる付値は 1 となる:

$$v(57)=1 \tag{5.5}$$

したがって点「5」,点「7」に対応する領域のどちらかに元が存在することになり

$$v(5)=1 \text{ または } v(7)=1 \tag{5.6}$$

が成り立つ.

5.4. (O) -型の定言命題

これは

$O(S,P)$:「ある S は P でない」

というものだが,集合の記号で書けば

$S\bar{P}$(＝$S\cap\bar{P}$)≠ ϕ

ということで,辺$S\bar{P}$すなわち辺 46 につけられる付値は 1 となる:

$$v(46)=1 \tag{5.7}$$

したがって

$$v(4)=1 \text{ または } v(6)=1 \tag{5.8}$$

が成り立つ.

5.5 付値のルールのまとめ

以上 5.1-5.4 節で出てきた式 (5.1)-(5.8) は簡単に

$$v(mn)=\max(v(m),v(n)) \tag{5.9}$$

という一つの等式にまとめられる.また,それぞれの定言命題に対応する G_{smp} の辺と付値もまとめて表にしておこう:

表 3. 定言命題の辺と付値

定言命題	対応する辺	付値
$A(X,Y)$	$X\bar{Y}$	0
$E(X,Y)$	XY	0
$I(X,Y)$	XY	1
$O(X,Y)$	$X\bar{Y}$	1

6. 定言三段論法と付値

本節では,付値を用いて定言三段論法の妥当性を判定する方法を解説する.

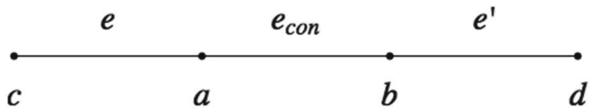
以下の叙述では,二つの仮定に対応するグラフ G_{num}の辺をe, e'とし,結論に対応する辺をe_{con}とする.したがって三段論法の妥当性は

「$v(e)$と$v(e')$の値から$v(e_{con})$の値を決められるか」

という問題に翻訳された.

6.1. $v(e_{con})=0$ が導かれる場合

命題 6.1. 結論の付値が $v(e_{con})=0$ となるのは，仮定の二つの辺 e,e' と e_{con} の位置関係が次の図のようになっており，しかも $v(e)=v(e')=0$ であるときに限る．



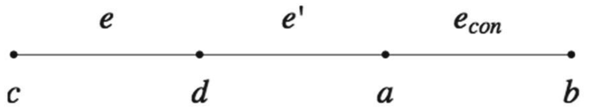
証明］辺e_{con}の端点を図のようにa,bとすると, 前節の等式（5.9）より $v(e_{con})=\max(v(a),v(b))$ が成り立つ．したがって $v(e_{con})=0$ という等式は

$$v(a)=v(b)=0$$

であることと同値である．この条件が辺e,e'の付値から導かれるのは，等式（5.9）によって点 a を端点に持つ辺 e の付値が 0，かつ点 b を端点に持つ辺 e' の付値が 0 でなければばならない．　　［証明終］

6.2. $v(e_{con})=1$ が導かれる場合

命題 6.2. 結論の付値が $v(e_{con})=1$ となるのは，仮定の二つの辺 e,e' と e_{con} の位置関係が次の図のようになっており，しかも $v(e)=0,v(e')=1$ であるときに限る．



証明］辺e_{con}の端点を図のように a,b とすると，$v(e_{con})=1$ となるためには，前節の等式（5.9）より $v(a)=1$ または $v(b)=1$ でなければばならない．そこで $v(a)=1$ とすると，図の $v(e')$ は 1 であるが，そのことから逆に $v(a)=1$ を結論づけるためには $v(d)=0$ であることが必要である．したがって図のような位置関係であって，しかも $v(e)=0,v(e')=1$ でなければばならない．$v(b)=1$ の場合は，a と b を入れ替えて議論すればよい．
［証明終］

例 6.1. 3 節の例 2 では「IAI-4」の妥当性をベン図を用いて確認したが, 今度はグラフでやってみよう．これは

$$\begin{array}{ll} (p_1) & I(P,M) \\ (p_2) & A(M,S) \\ \hline (con) & I(S,P) \end{array}$$

という推論だが，グラフで対応する辺と付値は表 3 と図 7，図 8 より次のようになる：

表 4. IAI-4 **の辺と付値**

	定言命題	G_{smp}の辺	G_{num}の辺	付値
(p_1)	$I(P,M)$	PM	37	1
(p_2)	$A(M,S)$	$M\overline{S}$	23	0
(con)	$I(S,P)$	SP	57	1

そしてグラフ G_{num} からこれら 3 辺だけのつながり具合を取り出して見ると次のようになっている：

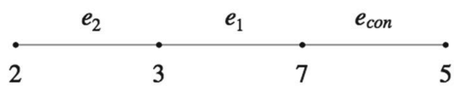


図 9. G_{num} **における** IAI-4 **の位置**

（ここで, 仮定 $(p_1),(p_2)$ に対応する辺をそれぞれ e_1,e_2，結論（con）に対応する辺を e_{con} で表している.）したがって命題 6.2 よりこれは妥当な論法であることが簡単にわかってしまう. しかしここでは命題 6.2 を忘れてこの図だけを頼りに考えてみよう．まず

$$v(e_1)=v(37)=1$$

だから $v(3)=1$ または $v(7)=1$ である．しかし $v(e_2)=v(23)=0$ だから $v(3)=0$ であり，したがって $v(7)=1$ であり，$v(e_{con})=v(57)=1$ が出る．したがって妥当な推論なのである．

例 6.2. 2 節で述べた例の妥当性をグラフを用いて検証してみよう．その仮定と結論，グラフでの辺，付値を表にすると次のようになる：

表 5. 2 節の例の辺と付値

	定言命題	G_{smp}の辺	G_{num}の辺	付値
(p_1)	$A(M,P)$	$M\overline{P}$	26	0
(p_2)	$O(S,M)$	$S\overline{M}$	45	1
(con)	$O(S,P)$	$S\overline{P}$	46	1

結論の付値が 1 だから命題 6.2 の適用範囲であり，そこで見たように結論の辺の片方の端点に仮定の 2 辺が連なっていなければならないが，この場合は

図 10. G_{num} における辺の位置

上図のように，そうなっていない．したがってこれは妥当でない三段論法である，といとも簡単に結論できる．

7. 妥当な三段論法の抽出

まず定言三段論法の標準形の決め方から，G_{num} における辺 e_1，e_2，e_{con}の位置はそれぞれ次の三通りずつしかあり得ない：

$$e_1 \in \{15, 26, 37\}$$
$$e_2 \in \{23, 45, 67\}$$
$$e_{con} \in \{13, 46, 57\}$$

なぜなら，仮定 1 には M と P のみを用いるのがルールであり，グラフ G_{smp} の辺の名前が M，P のみなのは G_{num} でいえば 15，26，37 だけだからである．e_2, e_{con} についても同様である．さらに e_{con} は 13 ではあり得ない．なぜなら，辺 13 は G_{smp} においては辺「$\bar{S}P = P\bar{S}$」に対応しており，表 3 を見れば，補集合Sが現れるのは A 型か O 型のみであって $A(P, S)$ か $O(P, S)$ の形に限られるが，これらは結論において「主語は S，述語が P」というルールに違反している．したがって e_{con} は 13 ではあり得ないので，それぞれの辺の可能性が

$$e_1 \in \{15, 26, 37\} \qquad (7.1)$$
$$e_2 \in \{23, 45, 67\} \qquad (7.2)$$
$$e_{con} \in \{46, 57\} \qquad (7.3)$$

に絞られることになる．

この条件(7.3)より結論とその付値が

$$e_{con} = 46,\quad v(46) = 0$$
$$e_{con} = 46,\quad v(46) = 1$$
$$e_{con} = 57,\quad v(57) = 0$$
$$e_{con} = 57,\quad v(57) = 1$$

の 4 通りしかなく，付値が 0 なら命題 6.1，付値が 1 なら命題 6.2 を適用すれば妥当な三段論法の分類が出来上がる，ということを以下で見ていこう．

7.1. $e_{con} = 46, v(e_{con}) = 0$ の場合

グラフ G_{num} から$e_{con} = 46$ 以外の辺の名前を取り除き，さらに条件(7.1)と条件(7.2)を考慮して e_1 になり得る辺には「①」，e_2 になり得る辺には「②」を書き込んだのが次の図である：

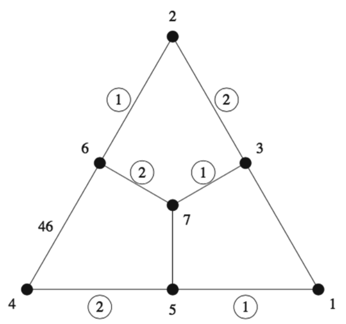


図 11. G_{num} における辺 46 の位置

命題 6.1 より辺 46 の片方の点からは①の辺，他方の点からは②の辺が出ていなければならないから

$$e_1 = 26,\ e_2 = 45$$

の場合しかあり得ない．このことから

$$e_1 = 26 = M\bar{P},$$
$$e_2 = 45 = S\bar{M},$$
$$e_{con} = 46 = S\bar{P}$$

であり，どの辺の付値も 0 だから表 3 よりこれは

$$\begin{array}{ll} (p_1) & A(M, P) \\ (p_2) & A(S, M) \\ \hline (con) & A(S, P) \end{array}$$

という妥当な三段論法「AAA-1」を与える．

7.2. $e_{con} = 57, v(e_{con}) = 1$ の場合

グラフ G_{num} から$e_{con} = 57$ 以外の辺の名前を取り除き，さらに条件(7.1)と条件(7.2)を考慮して e_1 になり得る辺には「①」，e_2 になり得る辺には「②」を書き込んだのが次のグラフである：

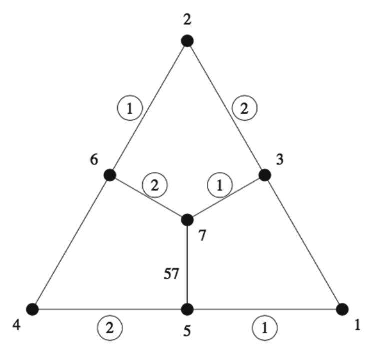


図 12. G_{num} における辺 57 の位置

すると命題 6.2 より辺 57 の片方の点に①の辺，②の辺の順に続くか，②の辺，①の辺が続くかのどちらかでなければならない. これらが可能なのは点「7」を使うときだけであり，それぞれ

$$e_1 = 37,\ e_2 = 23 \tag{7.4}$$

$$e_1 = 26,\ e_2 = 67 \tag{7.5}$$

の場合しかあり得ない. (7.4)の場合は命題 6.2 より

$$v(e_1) = v(37) = v(MP) = 1,$$
$$v(e_2) = v(23) = v(M\bar{S}) = 0$$
$$v(e_{con}) = v(57) = v(SP) = 1$$

となっており，これらを表 3 を用いて翻訳すると

(p_1) $I(M,P)$ (または $I(P,M)$)
(p_2) $A(M,S)$
(con) $I(S,P)$

となるから妥当な三段論法「IAI-3」及び「IAI-4」を与える．一方（7.5）の場合は命題 6.2 より

$$v(e_1) = v(26) = v(M\bar{P}) = 0,$$
$$v(e_2) = v(67) = v(SM) = 1$$
$$v(e_{con}) = v(57) = v(SP) = 1$$

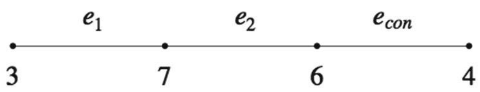
となっており，これらを表 3 を用いて翻訳すると

(p_1) $A(M,P)$
(p_2) $I(S,M)$ (または $I(M,S)$)
(con) $I(S,P)$

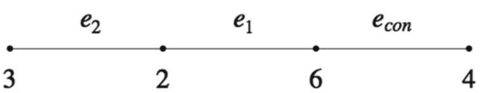
となるから妥当な三段論法「AII-1」及び「AII-3」を与える.

7.3. $e_{con} = 46, v(e_{con}) = 1$ の場合

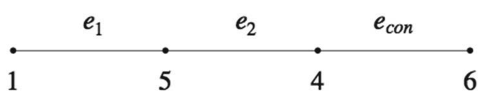
命題 6.2 と図 11 より以下の 3 つの場合しかない：



(7.6)



(7.7)



(7.8)

あとは前項と同様に考察して

(7.6)から EIO-1，EIO-2，EIO-3，EIO-4,
(7.7)から OAO-3,
(7.8)から AOO-2

という妥当な三段論法が生み出される.

7.4. $e_{con} = 57, v(e_{con}) = 0$ の場合

命題 6.1 と図 12 より以下の 2 つの場合しかない：

(7.9)

(7.10)

同様にして

(7.9)から AEE-2，AEE-4,
(7.10)から EAE-1，EAE-2

という妥当な三段論法が生み出される.

以上をまとめると次の結果が得られる：

表 6. 妥当な三段論法

第 1 格	第 2 格	第 3 格	第 4 格
AAA-1	EAE-2	IAI-3	AEE-4
EAE-1	AEE-2	AII-3	IAI-4
AII-1	EIO-2	OAO-3	EIO-4
EIO-1	AOO-2	EIO-3	

これは伝統的論理学において分類された妥当な三段論法の表と完全に一致する.

8. さらなる発展

伝統的論理学が重要な課題としてきた「妥当な定言三段論法の分類問題」が，「グラフとその付値」という観点を導入することによって極めて単純にしかも統一的な形で解決できることを示した. ただ第 4 節で「ベン図は 7 つの小領域に分かれている」と述べてグラフを導入した場面で, 注意深い読者はすでにお気付きのように，実はベン図には，3 つの円の外側の「$\bar{S}\bar{M}\bar{P}$」も含めて 8 つの領域がある. それらを用いて同じようにグラフを作ると, 立方体の頂点と辺から成るグラフとなり, その著しい対称性を利用すれば, 三段論法の分類はより透明なものになると同時に新たな論法をも生み出す, というさらなる発展については稿を改めて論じたい.

参考文献

[1] Patrick J. Hurley, *A Concise Introduction to Logic*, Wadsworth Cengage Learning, United States, 2010.