課題番号	Q20K-01
課題名（和文）	大域体上のガロア表現およびモジュライの数論的応用に関する研究
課題名（英文）	Research on arithmetic applications of Galois representations over global fields and moduli spaces
研究代表者	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 未来科学部、数学系列、教授 氏名　　新井　啓介
共同研究者	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 氏名
	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 氏名
	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 氏名
	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 氏名

研究成果の概要（和文）

整数論では、代数体と関数体の類似がしばしば重要なテーマになっている。代数体は整数や有理数と密接に関連したものであり、関数体は 0 と 1 から成るデジタルの世界を拡張したものと見なせる。本研究では、代数体と関数体の上の幾何的対象を比較しつつ研究を行った。代数体側では、高次元 QM アーベル多様体の非存在のための条件を得た。関数体側では、代数体上の QM アーベル曲面の理論の関数体版を構築した。

研究成果の概要（英文）

In Number Theory, we often discuss an analogy between number fields and function fields. A number field is closely related to integers and rational numbers, while a function field can be considered to be an extension of a digital world consisting of 0 and 1. In this research, we studied the subject comparing geometric objects over number fields and those over function fields. In the case of number fields, we obtained conditions of non-existence of higher dimensional QM-abelian varieties. In the case of function fields, we developed a function field version of the theory of QM-abelian surfaces over a number field.

1. 研究開始当初の背景

モジュライの有理点問題は、方程式の解を求めるという観点からも、幾何的構造を分類するという観点からも、数論幾何における最重要課題のうちの１つである。また近年において、フェルマー予想の解決など、数論の研究はガロア表現を用いることで大きく発展してきた。さらに、代数体と関数体の類似はよく知られており、楕円曲線と Drinfeld module など、両者の上の対象を比較しつつ研究を行うことで、双方ともに各段の進展が期待できることが分かってきた。

2. 研究の目的

中に指標が生じるようなガロア表現の性質を調べる。応用として、アーベル多様体のモジュライ、およびその関数体類似の大域体上の有理点について理解する。特に、有理点がいつあるか無いかについての理解を得る。さらに、有理点に関する知見をもとに、方程式の解や Hasse 原理などの数論的諸問題を開拓していく。同時に、高次元多様体の大域体上の有理点という難解な対象を理解する手掛かりを得る。また、代数体側と関数体側の帰結を比較することにより、両者の体の本質的な類似や相違について理解する。

3. 研究の方法

(1) ガロア表現の中に生じる指標の分類

代数体上のアーベル多様体やその関数体類似から定まるガロア表現の中に生じる指標を、有限素点におけるフロベニウス固有値の性質と局所的な群スキームの理論を用いて調べる。

(2) モジュライの有理点の決定

モジュライの大域体上の有理点と対応する幾何的対象から定まるガロア表現を調べる。(1)の指標の分類や自己準同型環の性質を用いて精密に調べることにより、有理点を決定する。

(3) 数論的応用

志村曲線やその関数体類似は、大域体上の有理点の集合が空集合になることがしばしばある。そのような場合に、局所体上の有理点の有無の判定法を用いて Hasse 原理の反例(すなわち局所と大域で有理点の有無にズレが生じる例)を作る。煩雑な計算を処理するために、Magma などのコンピュータープログラムを利用する。

4. 研究成果

(1) 代数体側では、アーベル多様体の自己準同型環の分類と、ガロア表現の中に生じる指標の計算を組み合わせることにより、高次元 QM アーベル多様体の非存在のための十分条件を、代数的整数論の言葉で明示的に記述することができた。

(2) 関数体側では、Jordan による代数体上の QM アーベル曲面や canonical isogeny character の理論の関数体版の構築を、Drinfeld-Stuhler module を用いて行った。特に、D-elliptic sheaf や τ-sheaf の理論を用いて Drinfeld-Stuhler module の還元型の詳細に関する成果を得た。

5. 主な発表論文等

〔学会発表〕（計３件）

① 新井 啓介, QM アーベル多様体の非存在および志村曲線の有理点について, プロジェクト研究集会 2020, オンライン, 2021 年 3 月 10 日.

② 新井 啓介, 代数曲線の有理点入門とサマースクールの概説, 2021 年度（第 28 回）整数論サマースクール「モジュラー曲線と数論」, オンライン, 2021 年 8 月 18 日.

③ 新井 啓介, Drinfeld-Stuhler curve の 2 次の関数体上の有理点について, プロジェクト研究集会 2021, オンライン, 2022 年 3 月 17 日.