電卓からパソコンまで

丸山　　彰*

From　an Electric　Calculator　to a Personal Computer

MARUYAMA　 Akira*

キーワード：　πの連分数　　四元数　四平方の定理　ランダムウォーク　デカルトの葉線

はじめに

小生は1980年より東京電機大学工学部、東海大学、日本大学理工学部の数学を担当してきたが関数電卓とパソコンを逐次活用し授業やゼミの資料にデータを挿入してきた。現在使用しているアプリでプログラムを再現し電卓とパソコン使用開始当時の模様を紹介し今後の活用について提言をしたい。

1・関数電卓事始め

関数電卓を初めて使用したのは1978年4月、casiofx2200 8桁で9500円もするので個人研究費から捻出した。外国(台湾)へ持参するとき8桁までなら税がかからないということで選んだ。微分積分学で出てくる$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, + \cdots$について部分和を順に求めると$1,2,,2.5,2.66 \cdots 2.70833 \cdots$ と続き第10項では $2.71828180114637 \cdots$で真の値$2.71828182459 \cdots$に近い値になる。eは今でも授業で$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$という数列の極限として紹介し学生にも関数電卓でどこまで求められるかを確かめさせているが10桁表示の電卓は

$\mathrm{n} = 10^9 = 1000000000$が限度のようである。

確率の問題に出てくる順列について教科書では$10! = 10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$までしか出ていない。関数電卓ではどこまで求められるかを探ってみた。すると$69! = 1.771224524 \times 10^{98}$と表示されるが、70!だとエラーになった。関数電卓の値は10の99乗までしか求められないためである。現在パソコンに搭載されている電卓は市販の関数電卓よりも精度が高く

$3248! = 1.9736342 \cdots \times 10^{9997}$ と表示される。

関数電卓で$70!$ を求めるには常用対数の和

$$log_{10}70! = log_{10}70 + log_{10}69 + \cdots + log_{10}1$$
$$= 100.0784050358$$

から$70! = 1.197857167 \times 10^{100}$を導くという方法を対数法則の応用例として授業で紹介した。

2. 電卓を用いた数学の問題

授業やゼミで電卓を用いて考察した数学の問題をパソコンであらためてとりあげて紹介したい。

例題1　　方程式$cosx = x$の解

1982年東海大学の微分積分学1で方程式$cosx = x$について$y = cosx$ と直線$y = x$のグラフを描けば交点が解になることがわかる。そこで

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_n = cosx_{n-1} \end{cases} (n = 1,2,3 \cdots)$という漸化式で与えられた数列の極限が解になることから電卓で$cos0, \cos(cos0), \cos(\cos(cos0)) \cdots$ と cos のキーを続けざまに押してみせたのが始まりである。

その後パソコンが普及してからはBASICで値とグラフ上の点の移動で視覚的に表示できるようになった。現在も使用されている10進BASICのプログラムとデータを紹介する。

＊工学部数学系列　非常勤講師 Part-time Lecturer, Department of Mathematics, School of Engineering

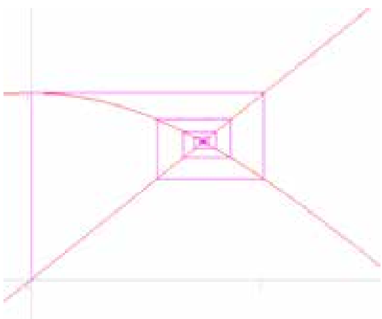
0	1		
1	.54030230	40	.73908516
2	.85755321	41	.73908510
3	.65428979	42	.73908514
4	.79348035	43	.73908512
5	.70136877	44	.73908514
6	.76395968	45	.73908512
7	.72210242	46	.73908513
8	.75041776	47	.73908513
9	.73140404	48	.73908513
10	.74423735	49	.73908513
11	.73560474	50	.73908513

0 から 50 までで 8 桁だと 46 回以降は固定する。

```
10 INPUT N
20 LET k=0
30 FOR I=0 TO N
40 PRINT    COS( K)
50 LET K=COS(k)
70 NEXT I
80 END
```

$y = cosx$ のグラフと直線$y = x$の上に

$(0,1), (1,1), (1, cos1), (cos1, cos1), (\cos 1, \cos(cos1))$ をマークして折れ線で結ぶと、交点の左側と右側を行き来していて解の両側から近づいていることがわかる。



$0.73908513 \fallingdotseq\ 0.318\pi$ で$\frac{\pi}{4} = 0.25\pi$よりやや大きい。

例題 2 円周率πの連分数展開

1982 年の東海大学湘南校舎の数学の授業でπの近似分数を電卓で求める方法を紹介したところ非常に興味を持ったようすだった。まだパソコンも学校には普及しておらず関数電卓が実験科目で用意するように指示されている頃なので数学の学習用のツールとは認識されていなかった。

電卓にはπが組みこまれているが精度について末尾の数字が丸目(四捨五入)になっているかどうかがわかりにくいので連分数展開で調べてみた。

$\pi = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}$とおいて$a_1, a_2, a_3, \cdots$ を電卓で求める。

$\pi = 3.1415926535$を表示し整数部分$a_1 = 3$を控える。

1. 整数部分を引く $\pi - 3 = 0.14159265358 \cdots$.
2 逆数を出し整数部分 7 を控える。

$$\frac{1}{0.14159265358} = 7.062513306$$

1.と 2.を繰り返す

$a_1 = 3,\ a_2 = 7,\ a_3 = 15, a_4 = 1, a_5 = 292 \cdots$,

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \cdots}}}}$$

近似分数を順に求めると $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113} \cdots$

$\frac{355}{113} = 3.1415929 \cdots$ は中国で蜜率として知られていて奇数の数字を並べてできる分数ということで記憶しやすい。

EXCEL によって一覧表を作成したもの

	x	Int(x)	x−Int(x)	1/x
1	3.141592654	3	0.141592654	7.062513306
2	7.062513306	7	0.062513306	15.99659441
3	15.99659441	15	0.996594407	1.003417231
4	1.003417231	1	0.003417231	292.6345909
5	292.6345909	292	0.634590875	1.575818436
6	1.575818436	1	0.575818436	1.736658533
7	1.736658533	1	0.736658533	1.357481051
8	1.357481051	1	0.357481051	2.797351067
9	2.797351067	2	0.797351067	1.254152708
10	1.254152708	1	0.254152708	3.934642315
11	3.934642315	3	0.934642315	1.069928018
12	1.069928018	1	0.069928018	14.3004196
13	14.3004196	14	0.300419599	3.328677632
14	3.328677632	3	0.328677632	3.042494846
15	3.042494846	3	0.042494846	23.53226532
16	23.53226532	23	0.532265317	1.87876228

数学のゼミの友人にも紹介したが電卓の精度に微妙なちがいがあることが$a_5 = 292$ の段階で判明する。小生の持っている Casio fx2200 では$a_5 = 292$ 友人の電卓は$a_5 = 293$ と表示された。その理由はπが何桁までこみこまれているか、と末尾の数字が丸目なのか、切り捨てなのかによる。

$\pi = 3.1415926535 \cdots$ で連分数展開では小数点以下第 9 桁について切り捨てると$a_5 = 292$丸めると$a_5 = 293$となる。πを表示させたときにこの方法で精度を比較してみた。πの値の覚え方として

3.1415926535897932384626433832795028841 97…
語呂合わせとして「産医師異国に向こう産後薬なく産婦みやしろに虫さんざん闇に鳴くお礼には早よ行くな」が有名だが、電卓のπがどこまでとったかを連分数展開でわかる。今のパソコン電卓での表示は「闇に鳴くお」の832795で小数点をずらせばその先の数字も出てくる。πの連分数に出てくる数字については二次無理数(整数の平方根で表示される無理数)が循環連分数というような規則性はない。1.参照

3.パソコン事始め

関数電卓を使用して数年後マイコンと呼ばれたパソコンは本体と周辺機器が大きくまた高価だったので電卓サイズでBASICが搭載されているポケットコンピューター(略称ポケコン) が広く使用されていた。印刷業の友人に個人教授をしたときにポケコンを持っていたのでプログラムを実行し教材を作成したことがある。そこで取り扱った数学を紹介したい。

(i)四元数と整数の問題

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = k = -ji,\quad jk = i = -kj,\quad ki = j = -ik$

となるi, j, k で構成される数

$q = a + bi + cj + dk$ $(a, b, c, d は実数)$ を四元数といい複素数の拡張になっている。

四元数の積

$(a + bi + cj + dk)(x + yi + uj + k)$

$= ax - by - cu - dv + (bx + ay - du + cv)i +$

$(cx + dy + au - bv)j + (dx - cy + bu + av)k$

をパソコンにプログラムしておく。これより

$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - da)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

という等式が導かれる。

「与えられた整数を四つの平方数の和で表せ」という問題は整数を四元数の積に変形して解答が求められる。例として$30 = 2 \times 3 \times 5$=の場合

$2 = 1^2 + 1^2 = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})$,

$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = (1 + \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k})(1 - \mathrm{i} - \mathrm{j} - \mathrm{k})$

$5 = 2^2 + 1^2 = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$

30=

$= (1 + \mathrm{i})(1 + \mathrm{i} + \mathrm{j})(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})(1 - \mathrm{i} - \mathrm{j})(1 - \mathrm{i})$

$= (-2 + 4\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + \mathrm{k})(-2 - 4\mathrm{i} - 3\mathrm{j} - \mathrm{k})$

$= 2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2$

整数を四元数の積で表す方法は順序を変えれば他にもあるが平方数は符号を別とすればただ一つである。ポケコンを提供してくれた友人は

1800= $18^2 + 26^2 + 28^2 + 4^2$

という結果にずいぶん驚いて、四元数の威力をまざまざと感じたようすだった。

四元数はハミルトンが空間における回転を複素数で表示できないかを探求してできたもので行列よりも入力データが少なくてすむので剛体の回転運動の表示で使用されている。

(ｉｉ)ランダムウォーク(乱歩)

直線上の駒についてコインを投げて表が出たら右へ一歩移動、裏が出たら左へ一歩移動させる。これを数回反復したときの駒の動きをランダムウォークという。これをパソコンの疑似乱数を用いて駒の位置をデジタル表示させてみた。プログラムは0と1の間の乱数で0.5より大のとき+1、小さいとき−1として順に足していく。回数と位置の座標でグラフは折れ線を描く、

```
10  RANDOMIZE
20  LET K=0
30  SET WINDOW 0,20,-20,20
40  DRAW Grid
50  FOR N=0 TO 20
60 LET K1=K+SGN(RND-0.5)
70  PRINT N,K
80  PLOT LINES:  N,K;
90  LET K=K1
100 NEXT N
110  END
```

実行例

0, 1, 0, 1, 0, −1, 中略 2, 3, 4, 3, 4

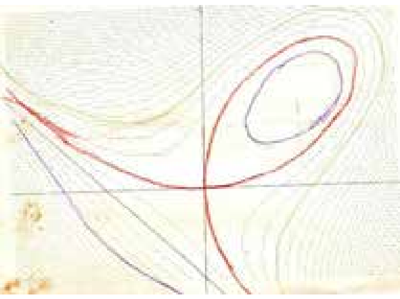
プログラムは簡潔で実行するたびにデータが変わるしかもいくらでも回数をふやすことができる。

小生は何回かこのプログラムを実行したが回数を重ねると原点から次第に遠ざかるのを観察した。研究室のパソコンで実行させたとき「一方に偏って原点になかなか戻らないのはおかしい」と漏らした先生がいたが、偏る場合の確率が高いということが逆正弦法則で明らかになっている。実力互角の二チームが対戦を繰り返したときにも一方のチームが相手を圧倒するケースの方がシーソーゲームを展開する確率より高いということである。パソコンで実験をしてみて初めて知ることができた。2. 参照

4.グラフィックス事始め

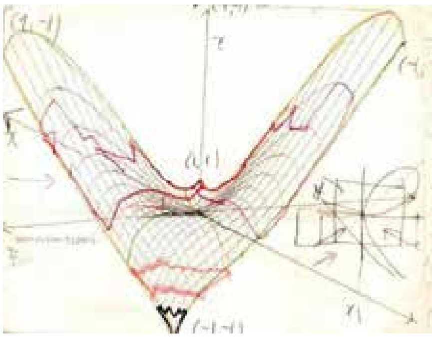
微分積分学Ⅱの授業でデカルトの葉線（方程式 $x^3+y^3-3xy=0$）をとりあげたとき陰関数定理により $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2-x}{x^2-y}$ の符号から曲線を描く。3. 参照

符号の分布が複雑なために増減表で描くのが難しい。そこで二変数関数 $z=x^3+y^3-3xy$ のグラフがどのような曲面になるかを調べることにした。z が一定の値に固定した時の曲面の等高線をパソコンで $z=-2$ から0. 5ずつ値を上げて該当する点をプロットしていくという原始的なプログラムだった。かなり時間を費やしたができあがった図を数学系列の先生に見せたところ「授業に使用したい」ということでデータを印刷し提供した。

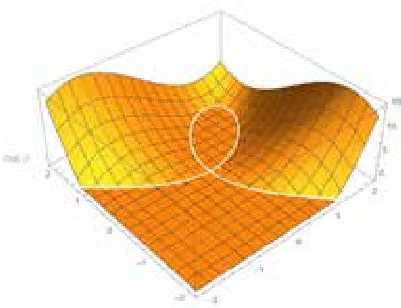


太線がデカルトの葉線　$z>0$ では単一曲線だが
$-1<z<0$ では二つの曲線に分岐する。
$z=-1$ の場合
$x^3+y^3-3xy+1=$
$(x+y+1)((x-1)^2+(y-1)^2-(x-1)(y-1))$

から直線 $x+y+1=0$ と点 $(x,y)=(1,1)$ の二つが出てくる。これから $z=x^3+y^3-3xy$ のグラフをイメージするのははなはだ難しい。立体図形を視覚化するために空間図形の射影変換による透視図をマニュアルのサンプルをもとにN88BASICで苦心惨憺してプログラムしディスプレイに表示させたとき数学系列の先生は「なかなか格好いい」と珍しそうなようすだった。



$-1\le x\le 1, -1\le y\le 1$
$(x,y)=(1,1)$ で極小値-1をとる。



Mathematicaによる表示で $z<0$ の領域では
平面 $z=0$ に置き換えると曲面と平面との境界上にデカルトの葉線が浮かび上がってくる。

おわりに

電卓とパソコンで自分のプログラムを入力したデータについて、今日ではサンプルをダウンロードして入手できる。しかし出来上がったデータを分析するには自分でプログラムするのと同じ努力がいる。今後自分で作成したデータを多くの人に提供して共同で開発できるようになることを期待する。

参考文献

1. 高木貞治　初等整数論講義　共立出版
2. フェラー「確率論とその応用 1 上」紀伊国屋書店
3.高木貞治「解析概論」岩波書店