思考と発見のある授業（４）

名　雪　順　一*

Class with thinking and finding（４）

NAYUKI　Junichi*

キーワード：因数分解、2 次方程式、新解法、ポーシェンロー、 Po Shen Loh

１．はじめに

2017 年度「文字式」、2018 年度「式の展開、因数分解」、2019 年度「2 次方程式」を東京電機大学総合文化研究の「研究ノート」に、「思考と発見のある授業（１）～（３）」として「主体的・対話的で深い学び」の授業実践をレポートしました。

今回は、東京電機大学理工学部「数学科教育法」における学生の模擬授業案（因数分解と 2 次方程式の解法）について、報告いたします。

2 次方程式の解法には、主に、平方完成、因数分解、解の公式の 3 つの方法があります。ここでは、因数分解による方法の授業案です。

そこで、授業案に入る前に、準備として、「式の展開」「因数分解」の復習をしておきましょう。

２.「式の展開」と「因数分解」

「式の展開」とは、単項式や多項式の積の形の式を、かっこをはずして単項式の和の形に表すことです。具体的な例で説明しましょう。

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

左辺の多項式×多項式が、なぜ右辺の単項式の和の式になるか？を分かりやすく理解して貰うために、図形（面積図）に表し、視覚化します。
式の構造を目に見える形にすると、考えるヒントになり、イメージしやすくなります。

左辺の多項式の一方を「たて」、他方を「横」とすると「たて」×「横」と考えることが出来ます。「たて」×「横」を計算すると面積になります。したがって、右辺の単項式の和は、面積を表していることになります。

それを、下図に表してみましょう。

図 1 は、たて$(x+2)$、横$(x+3)$ を表します。

（図 1）

	x	3
x	①	②
2	③	④

図２は、かけ算した面積を表します。

（図 2）

	x	3
x	① x^2	② $3x$
2	③ $2x$	④ 6

①～④の面積をたすと全体の面積になります。

$$x^2+3x+2x+6$$
$$=x^2+5x+6$$

よって、$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$
と $(x+2)(x+3)$ を展開できました。

「因数分解」とは、多項式（単項式の和）をいくつかの因数の積として表すことです。
したがって、「式の展開」の逆で、面積が分かっていて、「たて」と「横」を求めることです。

*理工学部共通教育群非常勤講師
Part-time Lecturer,Division of Liberal Arts,Natural,Social and Health Sciences,School of Science and Engineering

具体的な例で見てみましょう。

$x^2+10x+24=(\qquad)(\qquad)$

面積 $x^2+10x+24$（ただし、② $6x$、③ $4x$）が図３のようになっていたとします。

（図 3）

① x^2	② $6x$
③ $4x$	④ 24

そうすると、図４のように

たて$(x+4)$、横$(x+6)$ が求まります。

（図 4）

	x	6
x	① x^2	② $6x$
4	③ $4x$	④ 24

よって、$x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$

と「因数分解」できました。

これで、「式の展開」、「因数分解」の図によるイメージができました。

3. ある学生の模擬授業案（１）

因数分解は、次のように多項式を因数の積で表すことです。

$x^2+Bx+C=(x+a)(x+b)$ …（１）

$(x+a)(x+b)$ を展開すると

$x^2+(a+b)x+ab$ …（２）です。

よって、（１）（２）より、$B=a+b$、$C=ab$ となり、その a と b を探せば良いことになります。

和$(a+b)$ を一定にした下記の表を用意します。

和$(a+b)$	a	b	積(ab)	判定
$(a+b)$				

では、（例 1）$x^2+8x+12$ で説明します。

（表１）和 8、積 12 になる a と b を探す。

	和$(a+b)$	a	b	積(ab)	判定
①	8	1	7	7	×
②	8	2	6	12	○

表の①の和に８を入れます。a に１から入れていきます。b は７が入ります。積は７になります。与式の積の部分は 12 ですから、判定は×です。

次に②で、順に８、２、６、12 となります。積の 12 は与式の積の部分と一致しています。

したがって、$a=2$、$b=6$ と求まりました。

よって、$x^2+8x+12=(x+2)(x+6)$

と因数分解できました。

図で考えると、図５のようになります。

（図 5）

	x	6
x	① x^2	② $6x$
2	③ $2x$	④ 12

次の練習をやってみましょう。

$x^2+10x+24=(\qquad)(\qquad)$

（表 2）和 10、積 24 になる a と b を探す。

	和$(a+b)$	a	b	積(ab)	判定
①	10	1	9	9	×
②	10	2	8	16	×
③	10	3	7	21	×
④	10	4	6	24	○
⑤	10	5	5	25	×
⑥	10	$5-\alpha$	$5+\alpha$	$(5-\alpha)\times(5+\alpha)$	

④が、条件に一致します。

したがって、$a=4$、$b=6$ と求まりました。

よって、$x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$

と因数分解できました。

図で考えると、図６のようになります。

（図６）

	x	6
x	① x^2	② $6x$
4	③ $4x$	④ 24

このように、和を一定にして、表を埋めていき、積が一致するものを探し、a と b を求めれば、必ず因数分解できます。

学生の模擬授業案は、ここまででした。

ここで、この授業案を発展させて、表を使わずに④を見つける授業案を作ることにしました。

4. 授業案を発展させる

$$x^2+10x+24=(\ x+a\ )(\ x+b\ )$$

の a と b を探すのに、表 2 から、何か気づくことはないでしょうか？

①②③・・・と進むにつれて、a は、1、2、3、・・・と 1 ずつ増え、b は、9、8、7、・・・と 1 ずつ減っています。そして、⑤で $a\ =\ b=5$ となり、a と b が等しくなります。

⑤④③・・・と逆に見ていくと、

④ の a は $5-1$ 、b は $5+1$ 、

③ の a は $5-2$ 、b は $5+2$ 、

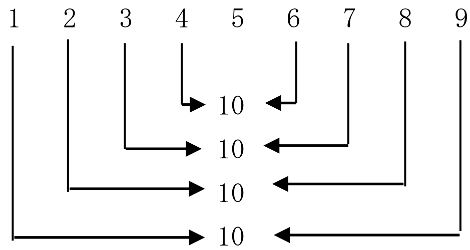
② の a は $5-3$ 、b は $5+3$ 、・・・

となっていることが分かります。

要するに、5 を中心として、それぞれ等しい数値だけ a は減り、b は増えています。

これを図に表すと、図 7 のようになります。

（図 7）和 $(a+b)=10$



これより、a 、b は、一般化すると表２ ⑥ の $a=5-\alpha$、$b=5+\alpha$ と表すことができます。

よって、式（１）（２）より、

$$B=a+b=(5-\alpha)+(5+\alpha)=10$$

中心の 5 は、a と b の平均値 $\frac{B}{2}=\frac{a+b}{2}=\frac{10}{2}=5$

で求めることができます。

すなわち、与式の x の項の係数を 2 で割った数値になることが分かります。

では、その時の積 $C=ab$ は、どのようになるでしょうか？

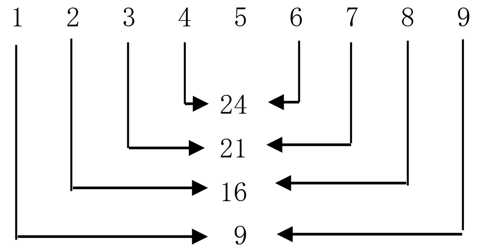
$a=5-\alpha$、$b=5+\alpha$ ですから、

$C=ab=(5-\alpha)(5+\alpha)=5^2-\alpha^2$

となります。

これも図に表すと、図 8 になります。

（図８）積 $ab=(5-\alpha)(5+\alpha)=5^2-\alpha^2$



したがって、

$$x^2+10x+24=(\ x+a\ )(\ x+b\ )$$

の場合、$ab=24$ ですから、

$ab=(5-\alpha)(5+\alpha)=5^2-\alpha^2$ より、

$24=5^2-\alpha^2$ の α を求め、

$a=5-\alpha$、$b=5+\alpha$ に代入すれば、

a と b が求まり、因数分解ができます。

これを図で考えると、図 9、図 10 になります。

（図９）

	x	b
x	① x^2	② bx
a	③ ax	④ 24

（図 10）

	x	$5+\alpha$
x	① x^2	② $(5+\alpha)x$
$5-\alpha$	③ $(5-\alpha)x$	④ $5^2-\alpha^2$

図 9④と図 10④が等しいことより、

α を求めてみましょう。

$5^2-\alpha^2=24$

$\alpha^2=5^2-24$

$\alpha^2=25-24$

$\alpha^2=1$　よって、$\alpha=1$
したがって、
$a=5-1=4$、$b=5+1=6$
となり、
$$x^2+10x+24=(\,x+4\,)(x+6\,)$$
と因数分解できました。
ここで、これまでやってきた、
この因数分解の方法をまとめておきましょう。
$$x^2+10x+24\ =(x+a)(x+b)$$
（図 9、図 10 参照）

（STEP 1）　$10\times\frac{1}{2}=5$

（STEP 2）$a=5-\alpha$ 、$b=5+\alpha$　と置く
（STEP 3）$(5-\alpha)(5+\alpha)=24$　より、 $\alpha=1$
（STEP 4）$a=5-1=4$ 、$b=5+1=6$
（STEP 5）$(x+4)(x+6)$

５．別の学生の模擬授業案（２）

この授業案は、「2 次方程式を解く」 です。
次の 2 次方程式を、①～⑦の穴埋めをして、解いてみましょう。
$x^2-2x-24=0$　（$x^2+Bx+C=0$）
$x=-\frac{B}{2}\pm\alpha$ …（３）で与えられる。

この時、$\left(-\frac{B}{2}+\alpha\right)\left(-\frac{B}{2}-\alpha\right)=C$ …（４）

を使って、α を求める。
実際に解いてみると、

$B=$ <u>－2</u> ① 、$C=$<u>－24</u>②より、$\frac{B}{2}=$ <u>－1</u> ③とな

り、それらを（４）に代入する。
$(\,1+\alpha)(\,1-\alpha)=$ <u>－24</u> ②
$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$　の乗法公式より、
<u>(1)</u>^{2}③ $-$ <u>(α)</u>^{2}④ $=$ <u>－24</u> ②
これを α について解くと、
$\alpha^2=$ <u>25</u> ⑤ 、 $\alpha=$ <u>5</u> ⑤
α が求まったら、実際の解は、

$x=-\frac{B}{2}\pm\alpha$　なので、代入すると、

$x=$ <u>6</u> ⑥ 、 <u>-4</u> ⑦
上記のように穴埋めをして、答えを導き出します。
そして、これに倣って練習問題に進みます。
この解法は、2019 年 12 月に、米国、カーネギ―メロン大学の Po-Shen Loh（ポーシェンロー）氏が発表した「2 次方程式の新解法」です。
この授業案では、確かに答えは出ますが、

なぜ、$x=-\frac{B}{2}\pm\alpha$ …（３）で与えられるのか？

なぜ、$\left(-\frac{B}{2}+\alpha\right)\left(-\frac{B}{2}-\alpha\right)=C$ …（４）

を使って、α を求めるのか？が分かりません。
この「なぜ？」を追求していくと、
式（３）、（４）は、「４．授業案を発展させる」より導き出された方法（STEP 1）～（STEP 3）へとつながります。
授業の中で、生徒が「なぜ？どうして？」という疑問を持ち、それを思考し、解明する中から、新たな発見があり、考え方が深まります。

６．おわりに

学生の模擬授業案（１）から、答えを求めるだけではなく、答えを見つける近道を考えることによって、別の方法が見つかりました。数学は、このように発展して来たに違いありません。
授業においても、生徒と一緒に、答えを見つける近道を思考し、それによって、新たな発見が生まれます。「思考と発見のある授業」です。
なお、この「４．授業案を発展させる」は、私が2003年6月に当時の勤務校で授業実践していたものをまとめ、数学教室 2004 年 1 月号（国土社）『「因数分解」の新しい試みと「解の公式」への発展』として投稿したものを参考にしています。
学生の模擬授業案を検討している中から、20 年前の自分の授業実践に再会するとは思ってもいませんでした。

参考文献

名雪順一　『「因数分解」の新しい試み
と「解の公式」への発展』
数学教室 2004 年 1 月号（国土社）