

平成30年度
博 士 論 文

分数階微積分システムのモデリングとシミュレーション方式
Modeling and Simulation Method for Fractional Calculus System

平成31年 3月

東京電機大学大学院
先端科学技術研究科 先端技術創成専攻

小野寺 慧知

指導教員 岩瀬 将美 教授

要 旨

本研究は Lithium-ion battery のシステムの次数に整数次数以外の次数が含まれていることに着目し、非整数階、つまり分数階微積分により記述されるシステムのモデリング方式および時間領域内でのシミュレーション方式の確立を目的としている。

分数階微積分とは従来の整数階の微積分を $1/2$ や $2/3$ といった無理数を含めた分数階へと拡張した微積分のことである。分数階微積分は、これまでの多くの研究者らにより従来の整数階の微積分ではモデル化が困難だったシステムや現象を分数階微積分によりモデル化できることや実際の物理的問題の解が与えられることが実証されてきている。また、1990 年代からの急速なコンピュータの発展に伴う計算処理性能の向上などから、研究が盛んにおこなわれてきている。

分数階微積分によりモデル化できるものには粘弾性体の振る舞いやアモルファス半導体の電気的応答、非圧縮性流体の時間依存性粘性モデルなどがある。アモルファス半導体の電気的応答を分数階微積分によりモデル化できることから、リチウムイオン電池をはじめとした二次電池の実時間での劣化診断への応用としても期待されている。

分数階微積分により記述されるシステムの多くは周波数領域での解析が多い。時間領域での解析も行われているが、分数階を整数階へと近似したものがほとんどであり、分数階をそのまま使用した時間領域での解析は少ない。これは、分数階微積分により記述される微分方程式の解軌道の中に Mittag-Leffler 関数と呼ばれるガンマ関数を使用した無限級数の計算と、さらに Mittag-Leffler 関数が畳み込み積分内に組み込まれた項を計算しなければならないことが要因の一つであるといえる。さらに、これらの計算を毎時間する必要がある。

そのため、分数階微積分により記述されるシステムを時間領域で、分数階を整数階へと近似しないためのシミュレーション方式が必要となる。そこで、本研究では分数次数を有する一般のシステムのモデルの構築方法と、そのモデルにより表される分数次数システムの振る舞いを時間領域内で整数階へと近似することなくシミュレーションする手法を検討し、提案する。1 章では本研究に至った背景や目的について述べる。具体的には、分数階微積分のこれまでに発行された論文数の推移や、分数階微積分に関する関連研究について述べ、リチウムイオン電池の特徴や特性、そして、これらの課題や課題に対する本研究の立ち位置について述べる。最後に本論文の構成と各章の概要を記載している。

次いで、2 章では分数階微積分の代表的な定義である、Riemann-Liouville の分数階微積分と Caputo の分数階微積分の定義を紹介し、Caputo の定義を使用した微分方程式と方程式の解軌道を示している。

3 章では、蛇型ロボットの横滑りを抑制した推進制御を行っている。Projection Method により 2 次元平面上の 5 リンクの蛇型ロボットをモデリングしダイナミクスを得る。そのダイナミクスに横滑りが起こりうることを考慮するために、従来研究で導入されていた「体幹と垂直方向へは滑らない」という拘束の代わりにクーロン摩擦と粘性摩擦を導入する。次いで、制御に必要な状態を推

定するためのオブザーバを設計し構築する。そして、横滑りを考慮しつつ目標値まで推進させる制御系を位置制御系をベースに設計する。最後に数値シミュレーションによって提案手法の有効性を検証する。

4章では、実際に分数次数を有している Lithium-ion battery を対象に分数階の状態空間表現を導出する。はじめに、Constant Phase Elements を考慮した Lithium-ion battery の等価回路モデルを導出し、その電気化学インピーダンスの伝達関数を求める。求めた伝達関数に使用されている各回路素子のパラメータは未知であるため、計測実験により実際の物理パラメータを Particle Swarm Optimization により推定する。推定した Constant Phase Elements の指数は実数であるため、Warburg インピーダンスの次数との最小公倍数で分数階微分の次数を決定する。決定した次数を基に、状態空間表現を導出する。これにより、実際の分数階の状態空間表現の導出方法を示している。

5章では、本論文の目的である、分数階微積分により記述されるシステムのシミュレーション方式を示している。分数次数の状態方程式の解軌道には無限級数の計算をする必要がある Mittag-Leffler 関数が畳み込み積分の内外に含まれている。畳み込み積分の項の計算を回避するために、外生入力を状態の中に組み合わせシステムを拡大系へと変換する。これにより先に述べた毎時間計算しなければならない畳み込み積分項を消すことができるため、単純な自由応答系の初期値応答を計算するだけでよい。この拡大系への変換を3章で導出した状態空間表現に適用し、シミュレーションすることで Lithium-ion battery の時間領域での応答を整数階へと近似することなく求めることが可能になる。

6章では2-4章をまとめ、結論を記載している。また、本研究の課題や今後の発展について述べている。分数階微積分の代表的な定義であり、Riemann-Liouville の分数階微積分の問題点を解決する Caputo の分数階微積分を使用することで初期値を任意に設定できる分数次数のシステムの構成法を示した。次に、実際に分数次数を有するシステムである Lithium-ion battery の分数階の状態空間表現を導出した。そして、状態方程式の外生入力を方程式の状態に組み込む拡大系への変換を行い、自由応答系の初期値応答をシミュレーションすることで外生入力を含んだシステムの時間領域内のシミュレーション方式を確立した。

目次

1.	序論	1
1.1	研究背景と目的	1
1.1.1	分数階微積分	1
1.1.2	リチウムイオン電池	3
1.1.3	解決すべき問題点	6
1.1.4	技術的背景	8
1.1.5	関連研究での取り組み	10
1.2	研究目的	11
1.3	論文構成	12
2.	分数階微積分	13
2.1	数学的準備	13
2.1.1	整数階微分の定義	13
2.1.2	ガンマ関数	14
2.1.3	Mittag-Leffler 関数	16
2.2	分数階微積分の定義	19
2.2.1	Grünwald-Letnikov の定義	19
2.2.2	Riemann-Liouville の分数階微積分	30
2.2.3	Riemann-Liouville の分数階微分	31
2.2.4	Caputo の分数階微分	32
3.	横滑りを考慮した蛇型ロボットの推進制御	34
3.1	5 リンク蛇型ロボットのモデリング	35
3.1.1	無拘束時の運動方程式	36
3.1.2	拘束力行列の計算	39
3.1.3	拘束後の運動方程式の導出	41
3.2	オブザーバの構築	42
3.2.1	オブザーバの設計	42
3.2.2	SDRE に基づいたオブザーバの構築	44
3.3	制御系設計	44

3.4	推進シミュレーション	46
3.4.1	推進制御の検証	46
3.4.2	オブザーバの検証	57
3.5	分数階微積分を蛇型ロボットの推進へ適用	63
3.6	まとめ	64
4.	Lithium-ion Battery の分数次数状態空間表現	65
4.1	等価回路モデルの導出	65
4.1.1	伝達関数の導出	67
4.2	インピーダンス測定実験	67
4.2.1	環境構築	68
4.2.2	測定結果	68
4.3	Particle Swarm Optimization によるパラメータ推定	68
4.3.1	PSO について	69
4.3.2	PSO によるパラメータ推定結果	70
4.3.3	推定したパラメータの妥当性の検証	71
4.4	分数次数状態空間表現	72
5.	分数次数システムのシミュレーション方式	74
5.1	分数階微積分による状態空間表現	74
5.2	状態方程式の拡大系への変換	76
5.3	行列 Mittag-Leffler 関数の計算方式	77
5.4	LIB での数値計算	78
6.	結論と今後の展望	82
6.1	結論	82
6.2	今後の展望	82
	謝 辞	92

1. 序論

1.1 研究背景と目的

1.1.1 分数階微積分

分数階微積分とは、1 階、2 階と整数階であった微積分を $1/2$ 階、 $2/3$ 階など分数へ拡張した微積分のことである。近年では従来の整数階の微積分ではモデル化が困難だったものを分数階微積分によりモデル化できることや実際の物理的問題の解が与えられることが分かっている。[61] では粘弾性体の振る舞いと分数微積分の関係を示し、その分数微積分モデルは物理的原理と一致していることを示している。[62] ではアモルファス半導体のモデルを分数拡散方程式 (fractional diffusion equation) で記述している。[63] では長期記憶過程のモデルである自己回帰和分移動平均 (Autoregressive integrated moving average process; ARIMA) 過程の和分の次数を非整数に拡大することで典型的な長期記憶のモデルを構成している。[64] では粘性のある非圧縮性流体の非定常流れの時間依存性粘性モデルを Fractional calculus を用いてモデリングし、解析している。こういった、分数階微積分の研究は文献をたどると 1695 年に de L'Hopital が Leibniz への数学的興味を尋ねるために宛てた書簡から始まっているとされている。

微積分には大きく分けると 2 通りの解釈があり、1 つは物理現象の解析に関連付けたもの、そしてもう 1 つは曲線の関係に関連付けたものである。前者は、位置の 1 階、2 階の時間微分がそれぞれ速度、加速度であるというように、時間の微積分を物体の運動に紐づけて解析する考え方は、ニュートンの慣性の法則が代表的である。また後者は、2 次関数の 1 階微分は 1 次関数であるというように、曲線と微積分に関連付けたものである。

前者の物理現象と関連付けた考え方をを用いて、分数階微積分と物理的パラメータの対応関係を考えた場合、位置の分数階時間微分は位置と速度の中間的なパラメータという意味になってしまい、その意味が不明瞭である。しかし、後者の考え方をを用いると、2 次関数の分数階微分は 1 次関数の中間的な曲線を表すということになり、その意味は明瞭となる。

これまでに多くの数学者が様々な分数階微積分の定義を提案してきた [68, 69]。そして、Web of Science にて Fractional Calc* や Fractional Derivative の発行論文数を調査すると、Figure 1.1, Figure 1.2 に示されるように、1990 年代から指数的に増加していることが確認できる。それ以前の期間では年に数本出ているかどうかというところである。この急増の背景にはコンピュータの発展により、数値解が計算できるようになったことや複雑な計算から生じる高コストな処理に対応できるようになったことなどが挙げられる。

分数階微積分によって表現されたシステム、すなわち分数次微分システムによる動特性のモデリン

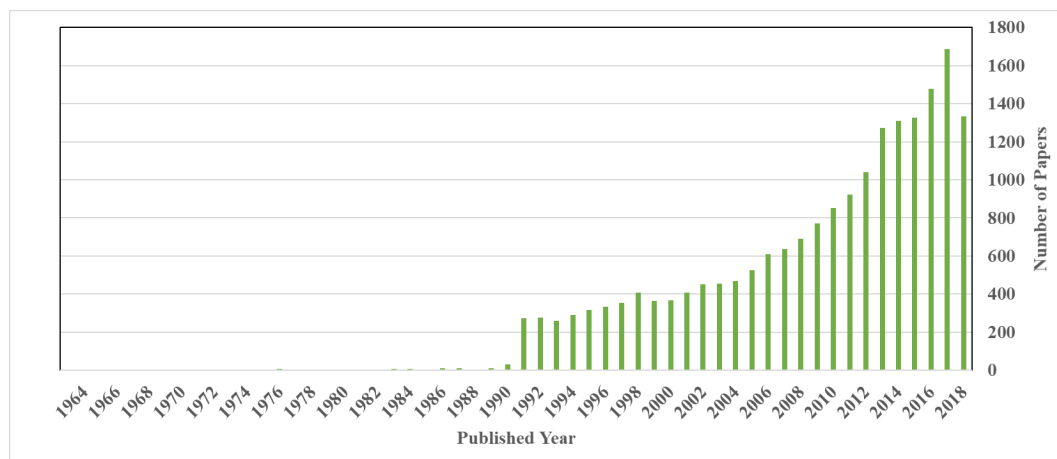


Figure 1.1: Fractional Calc* をトピックに含んだ 1964 年から 2018 年 (11 月現在) までの間の論文数の推移

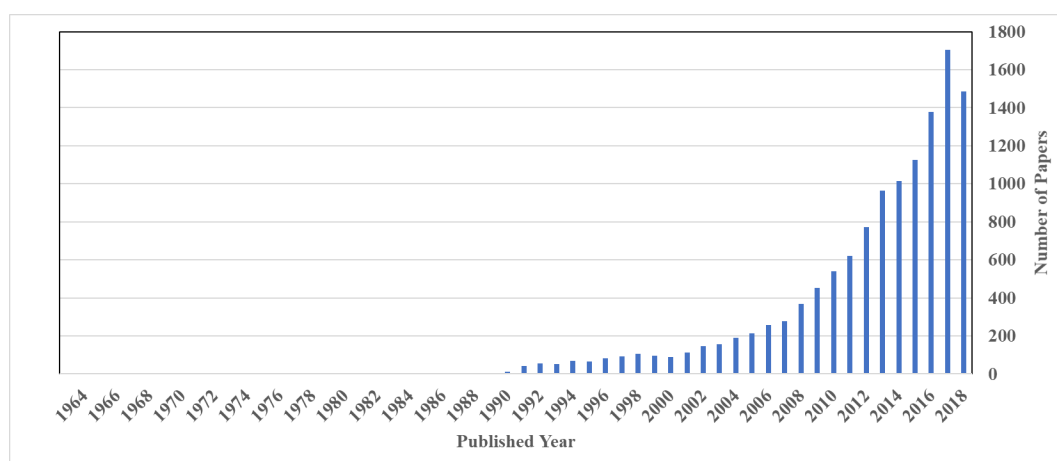


Figure 1.2: Fractional Derivative をトピックに含んだ 1964 年から 2018 年 (11 月現在) までの間の論文数の推移

グなどに関する研究 [61, 62, 63, 64] や、システムの安定性 [65, 66] や可制御-可観測の条件 [67] などの、システム理論を解析する研究がなされている。近年では、リチウムイオン電池 (LIB:Lithium-ion battery) をはじめとした二次電池における電氣的応答が分数階微積分により表現できることから、このアプリケーションへの適用が期待されている。

1.1.2 リチウムイオン電池

リチウムイオン電池は他の二次電池と比べ、高エネルギー密度、高電圧、長寿命であることが示された。このような特徴から、2000 年代頃からリチウムイオン電池搭載機器は急激に増加している。本節ではリチウムイオン電池について述べる。

リチウムイオン電池の電極や電解質の材料はこれまでの研究によって様々なものが用いられており、用途などによって材料が異なる [2]。

正極材料として、1980 年に水島らは LiCoO_2 がリチウムイオンを可逆的に吸蔵放出できる材料であることを発見し、電池の正極材料に用いることを提案した [3]。今日、ノート PC やスマートフォンなどの民生用リチウムイオン電池のほとんどに LiCoO_2 が用いられている。産業用では材料の使用量が増えるのに対して、コバルトは生産量の 4 割以上を電池用途が占めていることから、レアメタルのコバルトの使用量を抑えた材料が用いられている。主に用いられているものとしては $\text{Li}(\text{Ni}, \text{Co}, \text{Mn})\text{O}_2$ があり、他には安全性を考慮しつつコバルトフリーな LiFePO_4 や LiMn_2O_4 も正極材料に選択されている。電気自動車用には高容量化を図る為に Li_2MnO_3 や $\text{Li}(\text{Co}, \text{Mn}, \text{Ni})\text{O}_2$ などの固溶体などが検討されている。

負極材料には 1981 年に三洋電機が黒鉛炭素質を提案し、一般的に炭素材料が用いられるようになった [4]。用途に応じて材料は変化させ、グラファイト、ハード/ソフトカーボンが用いられる。炭素系の材料を用いることで金属リチウムの析出を防ぐことができるため内部短絡の可能性を抑えることができる。炭素系以外の材料にはチタン酸リチウムやケイ素、スズが挙げられる。チタン酸リチウムは 2008 年に東芝により商品化され、炭素系よりもエネルギー密度は低いが優れた充放電サイクル特性を持つため、急速充電が可能であり、5 分間で 9 割の充電が可能である。低温での動作特性も良好なことから、産業用で有利になる用途での利用が期待されている。ケイ素やスズ系は充放電での体積変化率が大きく、膨張収縮により、電極としての構造が壊れやすいことから研究が待たれている。

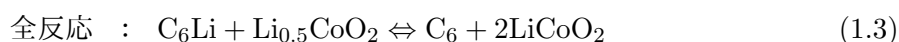
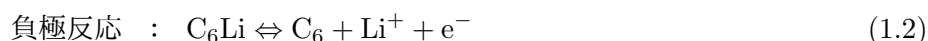
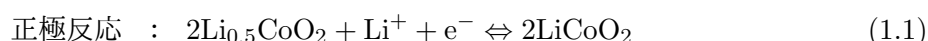
電解液には有機溶媒が主に用いられている。これは、電解液に水を用いると、水の電気分解電圧の 1.23V を超えており、リチウムイオン電池の起電力である 3.7V では水の分解が始まってしまい、電池内にガスが充満するためである。一般的には環状カーボネートと鎖状カーボネートの混合溶媒に Li 塩を溶解させたものを用いている。2016 年現在では電解液は可燃性のものがほとんどであり、不燃性の電解液の開発が求められている。また、有機系溶媒では水系電解液よりも $10^{-2} \text{1}/\Omega\text{cm}$ ほど電気伝導率が低い為、その他の部分で電極間抵抗を下げる研究がなされている。不燃性の電解

質を用いたリチウムイオン電池としては 1999 年に量産されたりチウムポリマー電池がある。極板の材料などはリチウムイオン電池と同様のものを用いるが、電解質に固体のポリマーが使用されており、これにより漏液の防止、安全性の向上が達成される [5]。また、リチウムポリマー電池は電解液をポリマーでゲル化させた電池である。電解液がゲル化することで漏出の恐れがなくなり、電池缶が不要となった。電池缶の代わりにアルミニウムのラミネートを用いることで、リチウムイオン電池と比べ、軽量かつ薄型である。リチウムイオンポリマー電池には Li^+ イオンの動きを抑制するセパレータが存在せず、内部抵抗がリチウムイオン電池と比べ小さい。このような特徴から携帯電話などのポータブル機器に広く用いられている。2018 年現在では電解質に固体を用いた全固体電池の開発も進められており、電気伝導率の向上により実用化が期待されている。

セパレータにはポリエチレンやポリプロピレンが用いられており、厚さが $20 \mu\text{m}$ 前後のフィルムである。フィルムには Li^+ イオンを透過させるために微小な孔が開いている。これが Li^+ イオンにとって抵抗成分である。セパレータには熱暴走を防ぐ働きもあり、リチウムイオン電池が短絡して内部温度が 130°C を超え始めると、孔部が溶融して閉塞する。これにより、 Li^+ イオンの透過は遮断され電池反応は停止し、安全を確保する。

上記したリチウムイオン電池の電極に用いられている材料の結晶構造は隙間が多く、原子サイズが小さいリチウムイオンは電極の結晶構造を変えることなく内部に移動し、電子を授受できる。この動作をロッキング・チェア構造といい、電極で溶解、析出反応が発生しないことから、電池の長寿命化を図ることができる。Figure 1.3 に充放電時のリチウムイオンの挿入と脱離反応を示す。

正極をコバルト酸リチウムとしたときのリチウムイオン電池の半反応式を (1.1), (1.2) に示し、(1.3) に全反応式を示す。(1.1) – (1.3) において、左から右の反応が放電反応であり、右から左への反応が充電反応である。



(1.3) から、電極内のリチウムを電極間でやり取りすることで充放電していることが分かる。

リチウムイオン電池の放電時の Li^+ イオンの動きを Figure 1.4 に示す。

- (1) 固相拡散過程 : Li^+ イオンが濃度勾配により、負極内から表面に移動する。
- (2) 溶媒和過程, 誘電緩和過程 : 表面に達した Li^+ イオンが有極性溶媒の作用で電解質に入る。同時に、正電荷を中和していた過剰電子が集電体に移動し、負極層が物理的に再配列する。
- (3) 拡散過程, 泳動過程 : 濃度勾配で Li^+ イオンが拡散するように移動し、電位勾配で負極から正極に向かって移動する。
- (4) 脱溶媒和過程 : 正極表面に達した溶媒和 Li^+ イオンが電極内に入る。

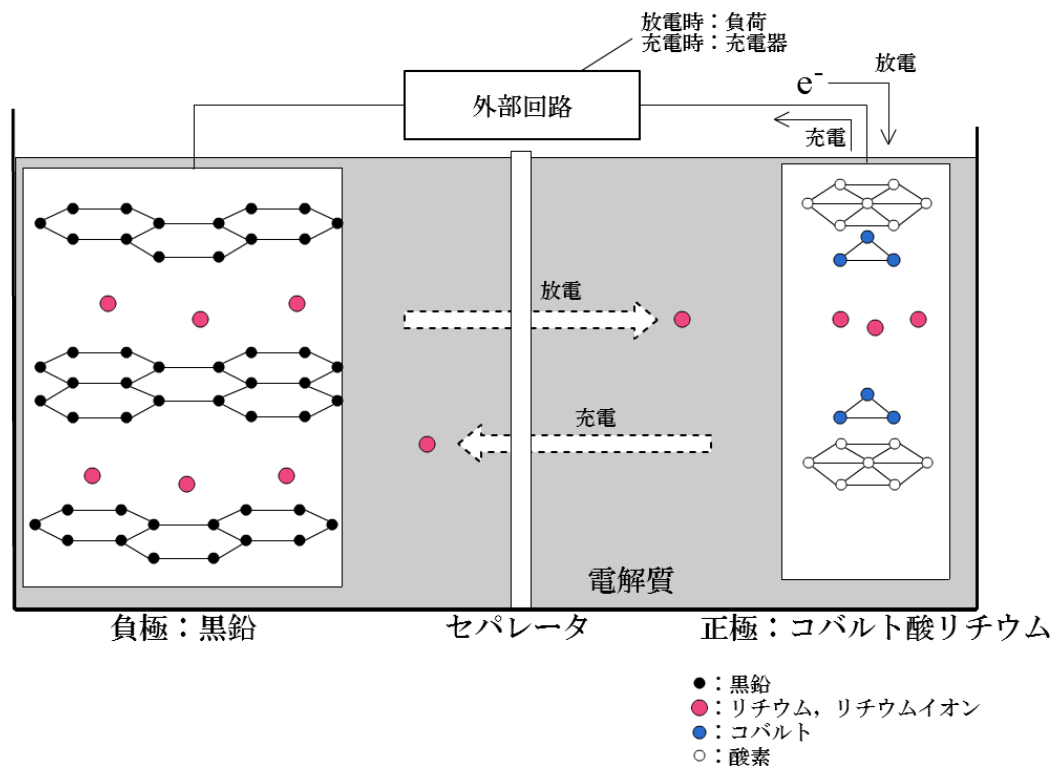


Figure 1.3 リチウムイオンの挿入と脱離

(5) 固相拡散過程, 誘電緩和過程: Li^+ イオンが濃度勾配により正極内部へ移動する. 同時に, 集電体から注入された電子が Li^+ イオンを中和し, 正極層が変化する.

充電時には, 逆の順序で Li^+ が正極から負極へ移動する. Li^+ イオンが電極に入ると電極は膨張し, 電極から Li^+ イオンが出ていくと電極は収縮する.

電極が膨張収縮を繰り返すことで, 剥離やひび割れが発生し, 劣化が進行する. 劣化にはサイクル劣化とカレンダー劣化の2つがある. サイクル劣化とは, 充放電を繰り返すことで発生する劣化である. 電極が膨張収縮を繰り返し, 電極活物質の剥離やひび割れが発生することで電極として利用可能な面積が減少し劣化が起こる. カレンダー劣化とは, 時間経過で発生する劣化である. 電極と電解質の間に固体電解質界面層 (以下 SEI 層) と呼ばれる薄膜が成長し, リチウムイオンの総量を減少させるため劣化が起こる. 劣化の進行具合は使用環境によって異なる. サイクル劣化では, 大電流での急速充電や放電, 高温や低温環境下での使用, 過充電・過放電により劣化は加速する. カレンダー劣化においては高温環境下で高充電率で放置した場合に劣化が進行する.

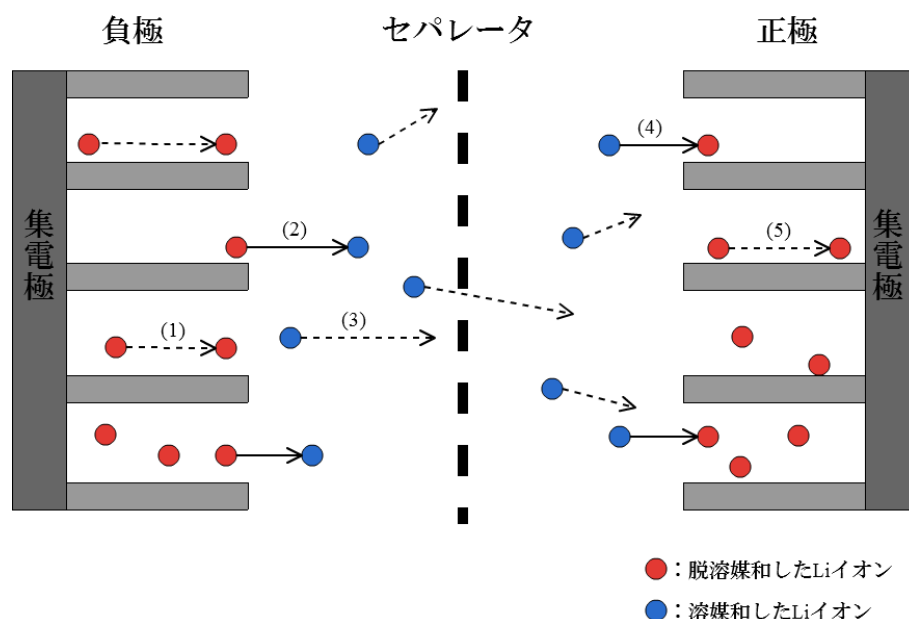


Figure 1.4 放電時のリチウムイオンの動き

1.1.3 解決すべき問題点

リチウムイオン電池は劣化が進行すると電池容量の低下や異常な発熱、発火が発生する場合がある。また、リチウムイオン電池は過充電や短絡、衝撃で発火が起きやすい [6]。以下に発火のメカニズムをまとめる [7]。まず、衝撃による正極と負極の接触や、経年劣化による SEI 層の成長により、微小短絡が発生し、電池内部の温度が上昇する。80℃付近まで上昇すると負極表面被膜と電解液が反応し、温度が上昇する。同時に電解液自体が温度により分解を始める。130℃付近でセパレータの孔が閉塞し、電池反応が停止する。しかし、何らかの理由で温度上昇が止まらず、160℃付近まで温度が上昇するとセパレータがメルトダウンし、極板間において全面的に短絡が発生する。全面的に短絡が発生することで急激にリチウムイオン電池は発熱し、220℃以上で熱暴走が起こり、発火に至る。

竹野らはジュール熱の発生量と短絡時のリチウムイオン電池の内部抵抗の関係を明らかにし、そこから実験的に熱暴走の発生を確認している [8]。

電池を複数の組電池で用いる場合に劣化が発生しやすい場合がある。電池を直列や並列で複数接続した場合、出荷状態で電池の劣化度や充電率などの状態がそれぞれの電池で違う場合がある。並列接続において、ある電池の充電率が0%になっても、並列接続した電池にまだ容量が残っていた場合には先に空になった電池において過放電が発生し、劣化が急激に進行する。充電時にも同様にして、どれか1つの電池が満充電になった場合に他の電池がまだ満充電ではなかった場合、満充電の状態からさらに充電され過充電の危険性がある。

リチウムイオン電池の発火事故の事例はスマートフォンや旅客機などで多数報告されており、劣

化を抑える技術や劣化診断技術が求められている。劣化を抑える技術としては、前節で述べた電極や電解質、セパレータなどの材料の改良や、電池にキャパシタなどを併用したシステムの開発がある。

電池と併用するシステムでは、佐藤らがリチウムイオン電池に加え、電気二重層キャパシタ・アルミ電解コンデンサを用いたシステムを考案した [9]。考案したシステムはポータブル電源規模の装置でリチウムイオン電池単体と比べ、応答特性が向上していることを確認している。中山らはリチウムイオンキャパシタ、DC バスを併用し、実用規模での電圧、出力容量、貯蔵エネルギー容量をもつハイブリッド蓄電システムの開発を目指し、再生可能エネルギー用に低電流でも効率よくエネルギーを回収できるシステムを実装し、システムの制御系を設計している [10]。

劣化診断技術として、電池の入出力である電流と電圧からシステムを同定する技術が盛んである。従来の研究では、電池を 0 % から 100 % まで充電、もしくは、100 % から 0 % まで放電し、電池容量を電流積算法で計算することで満充電容量からどれだけ容量が減っているかを推定していた。しかしながらこの方法ではセンサの誤差や、電流積算法での積分誤差、自己放電による電力量が推定に影響し、正確に容量を推定できないといった欠点があった [11]。また、電池を空の状態から完全充電するか、容量満タンの状態から完全放電する必要があるため非常に手間である。さらに、電流積算法では電荷を計測する専用の機器を用いるため、電池を機器から一度取り外すか、機器を一度停止させる必要があることからオンラインでの推定が必要となっていた。この問題に対して、松島は放電電圧の降下値と電池容量の関係を調べ、オンラインでの容量推定の手法を提案している [12]。しかしながら、容量変化やサイクル数だけでは劣化具合が異なり、同じ充電回数、容量変化の電池でも劣化具合は異なる [13]。

リチウムイオン電池はモデルの次数の中に実数が含まれることが分かっており、これは従来の整数階のシステムでは表現しきれないため、分数階のシステムとして表現される。しかしながら、上記のようにオンラインでの劣化診断を実現するには時間領域内での解析が望まれるが、分数階システムは周波数領域での応答の解析は比較的容易であるが時間領域での解析のための数値計算のコストが高くなってしまい容易ではないことが分かっている。

1.1.4 技術的背景

分数階微積分に関する研究

分数階微分 (Fractional Calculus: 非整数階微積分) は前述したように分数階微積分によって表現されたシステム, すなわち分数次微分システムによる動特性のモデリングなどに関する研究 [61, 62, 63, 64] や, システムの安定性 [65, 66] や可制御-可観測の条件 [67] などの, システム理論を解析する研究がなされている. これに伴い, これらを基に多くの研究者が分数階微積分を対象にシステム理論やそれに付随するアプリケーションなどの研究・開発を行っている.

高松は分数階微積分を有する非線形制御系と適応制御系の設計を行っている [21]. 分数階微積分を有するシステムに対しバックステッピング法を用いたスライディングモード制御を設計し, またリチウムイオン電池に対して適応観測器を構築している. Manabe は非整数階の積分で表されるシステムを整数階で近似して数値計算を行う手法を提案している [22]. 池田らは振動系を分数階に拡張し, 拡張したシステムに対し分数階の最適レギュレータを設計している [23]. 従来の整数階微分により表記されたシステムと分数階に拡張したシステムとで最適レギュレータの性能を評価している. Saptarshi Das らは分数次数のファジー PID コントローラの設計をしている [24]. Swati Sondhi らは Load Frequency Control のために分数階の PID 制御系を設計している [25]. Indranil Pan らはカオスを組み込んだ Particle Swarm Optimization を用いて再生可能エネルギー発電によるハイブリッド発電システムの分数次数ファジー制御を実現している [26]. Chun Yin らは非線形システムのクラスの極致探索制御に基づくスライディングモード制御の設計している [27]. S. H. Hosseinnia らは分数次数で表現された不確実なカオスシステムのスライディングモード制御による同期を行っている [28]. Guy Jumarie は分数差分を介した分数階微積分における微分の連鎖律とこれを用いてシステムモデリングへ応用した [29]. Achraf Nasser Eddine らは電気化学インピーダンスの時間領域における拡散パラメータを分数階システムを用いて同定している [30]. YangQua Chen らは分数階制御についてまとめその中でも特に, 分数階の PID 制御について示している [31]. Elham Amini Boroujeni らは非線形分数階システムのクラスに対して non-fragile な非線形分数次数オブザーバを設計している [32]. Kai Chen らは未知パラメータを有する分数階の非線形システムのクラスに対してロバストな適応分数次数オブザーバを構築している [33]. Firas Khemane らは集合のメンバシップ関数を用いた周波数領域における分数モデルのロバスト推定をしている [34].

分数階微積分を用いたリチウムイオン電池に関する研究

リチウムイオン電池の需要が高まるにつれ, リチウムイオン電池の充電状態の推定や劣化診断, これらのための数値計算のために分数次数を含めた電池システムの研究が行われている.

Qishui Zhong らは分数階のスライディングモードオブザーバを用いてリチウムイオン電池の充電状態を推定している [35]. これは分数次数を有する RC 等価回路モデルにより分極電圧と端子間電圧の推定をしている. Jocelyn Sabatier らは分数微分を含めてリチウムイオン電池のモデリング

をしており、バッテリーモニタリングシステムにより、SoC, SoH など利用可能な電力の情報を得ることができる [36]. また、リチウムイオン電池の簡単な分数微分に基づくモデルの構築法やその関連のパラメータの推定手法を述べている [46]. Yunfeng Jiang らは Constant Phase Element を含んだリチウムイオン電池の非線形な動的モデリングに対してデータに基づいた分数微分によりモデリングしている [37]. Isabel S. Jesus らは電解質プロセスに基づいた分数次数を有するコンデンサの開発を行っている [38]. このコンデンサの周波数応答から、分数次数のコンデンサは従来の整数次数のコンデンサに取って代わることが可能であることが示された. Xiaoyu Li らはリチウムイオン電池に対して物理学にもとづいた分数次数モデルの構築とエネルギー状態推定、電池のパラメータ同定を行っている [39]. 物理モデルによるパラメータ同定法と組み合わせたロバストなエネルギー状態推定法を提案し、異なる動作条件と異なる経年劣化段階で正確な電池の状態推定を実現している. Fuli Zhong らはリチウムイオン電池に対する適応スライディングモードオブザーバと分数次数を含んだ等価回路モデルに基づいた SoC の推定手法をアプローチしている [40]. Baojin wang らはリチウムイオン電池を分数次数を含めてモデリングしそのモデルのパラメータを同定している [41]. 時間領域でのテストデータから Particle Swarm Optimization を用いて同定している. また、非線形分数モデルに基づくリチウムイオン電池の充電状態の推定を行っている [45] Renxin Xiao らは整数次数と分数次数に基づいたリチウムイオン電池に対してモデリングと SoC の推定を行った [42]. Daming Zhou らはリチウムイオン電池の分数次数モデリングのためのパラメータの感度解析を行っている [43]. アプリケーションの埋め込みのためのリチウムイオン電池の新たな分数次数モデルについて述べている. Rui Xiong らはリチウムイオン電池における SoC 推定のための新しい分数次数モデルを構築している [44]. Butler-Volmer の方程式と Constant Phase Element による分数次数モデルを構築し非線形最適化や UKF を使用している. Lei Zhang らはウルトラキャパシタのための分数次数モデリングと充電状態の推定をしている [47]. Constant Phase Element と Warburg-like Element を用いた等価回路モデルを使用している. Ruixin Yang らは全気候電気自動車への応用のための分数次数モデルベースの電池外部短絡故障診断を行っている [48]. この研究ではリチウムイオン電池の外部短絡故障特性に及ぼす SoC と温度の影響について示されている. Changfu Zhou らはリチウムイオン電池に対してロバスト性と安定性が保証された非線形分数次数推定器を構築している [49]. Qi ZHANG らは EV 用電池の分数次数ハイブリッドモデルと統一等価回路モデルとの関連性を調査している [50]. Pierre E. Jacob らは Constant Phase Element を含んだ電池の分数次数への応用を伴う非マルコフ状態空間モデルにおけるベイズ推定を行っている [51]. Sara Mohajer らはリチウムイオン電池の寿命向上のために分数次数による電気-熱の劣化モデルを構築し、カレンダー効果とサイクリング効果の分離に基づく経年劣化モデルを提案している [52]. Yuan Zou らはリチウムイオン電池のための非整数次微分を用いた状態空間モデルを提案している [53]. Qingxia Yang らはリチウムイオン電池用の簡易分数次数インピーダンスモデルとパラメータ同定法を提案している [54]. 時間領域におけるテストデータに対し最小二乗遺伝的アルゴリズムにより同定している. Jinpeng Tian らはリチウムイオン電池の劣化状態認識のための

分数次数モデルをベースとした増分容量解析を行い, SoH の推定方法と経年劣化のメカニズムの同定方法を提案している [55]. Hao Mu らはリチウムイオン電池のための分数次数モデルをベースとした充電状態の推定手法を提案している [56].

1.1.5 関連研究での取り組み

前節でも述べたように, リチウムイオン電池の内部状態を推定し, そこから劣化を診断する技術が盛んになっている. 電池の内部状態には様々なものがあり, Figure 1.5 に一例をタンクモデルで表す [1]. 電池を 100 % 充電した状態での電池容量を Full Charge Capacity(FCC) といい, Figure

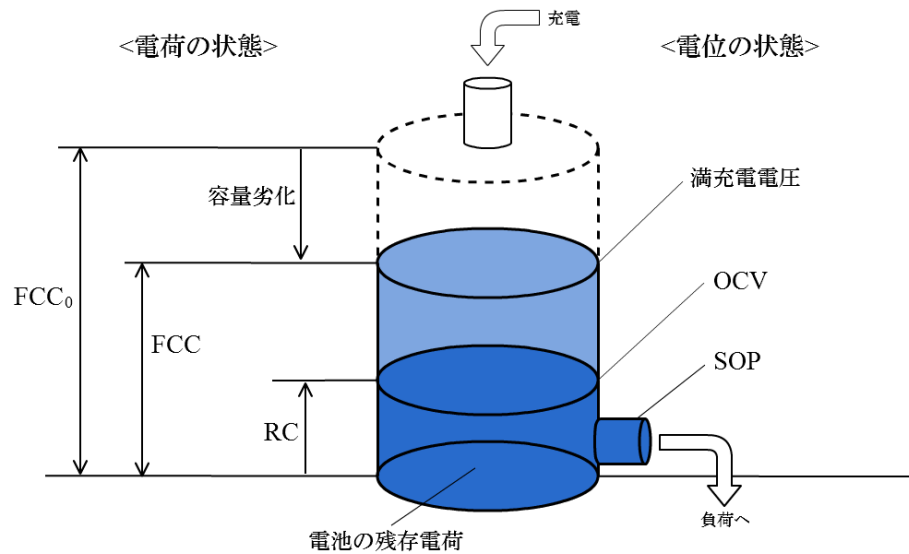


Figure 1.5 リチウムイオン電池のタンクモデル

1.5 のタンクモデルにおいて, タンクを満した時の電荷量を表している. また, 新品状態での FCC を FCC_0 という. 残存容量は Remining Charge(RC) で表され, 充電率や FCC によって変化する. 電池の開回路電圧を Open Circuit Voltage(OCV) といい, 端子電流が 0A の時の平衡電圧である. 電池をどれだけ速く充放電できるかは State Of Power(SOP) で表され, 電池が劣化するにつれ, この値は減少する. 電池の劣化度合いは State Of Health(SOH) で表されることが多く, (1.4) で導出することができる.

$$SOH = \frac{FCC}{FCC_0} \quad (1.4)$$

電池の充電率は State Of Charge(SOC) で表され, 2018 年現在では SOH や SOC 推定がリチウムイオン電池の状態推定において盛んである. 電池の状態推定では, 大きく分けて実時間領域と周波数領域 2 つの推定方法がある.

実時間領域での状態推定では, 電池の充放電時の電圧, 電流の時系列データを用いて, 状態を推定

する。馬場らはリチウムイオン電池の等価回路モデルを導出し、その物理パラメータと SOC をシリーズカルマンフィルタや Unscented Kalman Filter(UKF) を用いて推定している [14, 15]。Cen らは、電流と電圧の時系列データに対して、Adaptive Thau Observer を用いることで、リチウムイオン電池の OCV, SOC を推定している。彦野らはリチウムイオン電池の温度特性を考慮した SOC 推定のための電池モデルを提案し、SOC 推定の精度向上を実現した [16]。しかしながら、これらの研究ではリチウムイオン電池の温度特性や劣化を考慮していない。また、状態推定のためにモデルを簡略化しているため、リチウムイオン電池の電気化学的な振る舞いをモデルが表現しきれていない問題がある。従ってオンラインでの高精度での状態推定、劣化診断ではリチウムイオン電池の電気化学的な振る舞いを考慮したモデルが必要となる。

周波数領域での状態推定では、主に電気化学インピーダンス法が用いられている。リチウムイオン電池に正弦波掃引信号を入力する。その電流、電圧の入出力比からインピーダンスを計測し、周波数特性から状態を推定する。周波数領域での状態推定では、周波数成分を潤沢に含む信号を用いることができるので、高精度にシステムを同定することができる [1]。ここで、周波数特性は通常線形システムに用いるが、Figure 1.4 において、各反応の速度は異なるため各反応の状態は異なる周波数の信号から同定することができる。

Yang らはリチウムイオン電池の電気化学インピーダンスデータを解析し、等価回路モデルを同定することで、リチウムイオン電池の電圧の追跡に有効であることを示している [17]。また、このシステムを用いることで SOC 推定に有効であるという考えを述べている。Eddahech らはリチウムイオン電池の等価回路モデルを導出し、リカレントニューラルネットワークを用いてリチウムイオン電池の動作を監視することで SOH の推定方法を提案している [18]。

以上のことから、周波数領域での同定により、高精度に状態を推定し劣化を診断できると考える。リチウムイオン電池の劣化診断に関する先行研究として、野口らはリチウムイオン電池の電気化学インピーダンスを用いた等価回路モデルを導出し、Levenberg Marquardt Method(以下 LM 法)を用いて、回路素子の物理パラメータを推定した [19]。推定した等価回路モデルの物理パラメータの劣化との関連性の調査について、Fernandez らは等価回路モデルの抵抗の劣化との関連づけについて述べている [20]。

1.2 研究目的

本研究では、リチウムイオン電池の詳細なモデルを表現することができる分数階微積分を用いた一般のシステムの時間領域における数値的なシミュレーション方式を確立することを目的とする。

そのために、分数階微積分の基本的な性質を調査し、これを用いてシステムをモデリングする。分数階微積分により表現されたモデルを状態空間表現の形式に変形し、これの解軌道を計算する。この分数階システムの計算方式が従来では分数階を整数階へと近似しているため、分数階を残した状態でのシミュレーションを目指す。

1.3 論文構成

2 章 分数階微積分

分数階微積分における Riemann-Liouville の分数階微積分と Caputo の分数階微積分について説明する。本論文内では Caputo の分数階微積分を採用し、Caputo の分数階微積分の加法性を利用した一般的な分数階システムの構築方式を示す。

3 章 横滑りを考慮した蛇型ロボットの推進制御

Projection Method により 2 次元平面上の 5 リンクの蛇型ロボットをモデリングしダイナミクスを得る。そのダイナミクスに横滑りが起こりうることを考慮するために、従来研究で導入されていた「体幹と垂直方向へは滑らない」という拘束の代わりにクーロン摩擦と粘性摩擦を導入する。次いで、制御に必要な状態を推定するためのオブザーバを設計し構築する。そして、横滑りを考慮しつつ目標値まで推進させる制御系を位置制御系をベースに設計する。最後に数値シミュレーションによって提案手法の有効性を検証する。

4 章 Lithium-ion Battery の分数次数状態空間表現

Lithium-ion battery の等価回路モデルは一般的には電気回路図やインピーダンスの伝達関数を指すが、本研究ではインピーダンスの伝達関数を求めたのちに、これの分数階状態空間表現の実現を得る。ただし、分数階の次数は CPE と Warburg インピーダンスの次数から決定する。CPE の次数は Particle Swarm Optimization(PSO) により他の回路素子と同時に同定することで求めることができる。求めた次数から Lithium-ion battery の次数を決定し、分数階の状態空間表現を導出する。

5 章 分数次数システムのシミュレーション方式

一般的な分数次数システムの時間領域でのシミュレーション方式を提案する。分数次数の状態空間表現の解軌道の計算には、畳み込み積分の中に無限級数の計算が含まれており、これをまともに計算する場合には時間が更新されるたびに無限級数とそれを含めた畳み込み積分を計算する必要があった。しかし、提案手法では毎時間の畳み込み積分の計算を避けることができ、計算コストの低減が見込める。

6 章 結論と今後の展望

各章をまとめた結論と今後の課題について述べる。

2. 分数階微積分

本章では, 本論文の基礎となる分数階微積分の理解のために, 数学的準備として整数階微分の定義やガンマ関数について説明したのち, 分数階微積分の各定義 (Günwald-Letnikov の定義, Riemann-Liouville の定義, Caputo の定義) やそれらの性質について述べ, 分数階微積分の要素を含むシステムの状態空間表現によるモデリング手法を示す.

2.1 数学的準備

本節では数学的準備として, はじめに整数階微分の定義を確認し, ガンマ関数と Mittag-Leffler 関数について説明する. ガンマ関数は整数階微分を非整数である分数階の微分に拡張するうえでは非常に重要な関数であり, Mittag-Leffler 関数は分数階微積分により記述された状態空間表現の計算では重要な役割を持っている.

2.1.1 整数階微分の定義

分数階微積分の各種定義について述べる前に整数階での微分の定義を確認する. ある連続関数 $f(t)$ の刻みを h とした時の 1 階の微分は (2.1) で定義される.

$$f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (2.1)$$

この定義に 2 階微分を適用する:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d}{dt}f'(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

そして, (2.1), (2.2) から 3 階の微分は

$$f'''(t) = \frac{d^3}{dt^3}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 2f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (2.3)$$

とでき, 帰納法から n 階の微分は

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \quad (2.4)$$

と定義できる. ただし, 式中の $\binom{n}{r}$ は次式で計算できる二項係数である

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}. \quad (2.5)$$

2.1.2 ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は分数階微積分の基礎の関数の 1 つであり, 階乗 $n!$ を一般化し, n を非整数や複素数の値を取ることができる. そのガンマ関数 $\Gamma(z)$ は積分により次式で定義される

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (2.6)$$

ただし, $\operatorname{Re}(z) > 0$. また, 実部が正の時の複素数に適用すると,

$$\begin{aligned} \Gamma(x + jy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+jy} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{jy \log(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + j \sin(y \log(t))] dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

を得る. しかし, 実部が負の場合ではこれらは計算することができない. そこで, (2.6) を実部が負のときにも適用できる別の形式が定義されている

$$\Gamma(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^z k!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+k)}. \quad (2.8)$$

この定義は実部が正の複素数の範囲では (2.6) と同じであると証明されている. 式 (2.8) のガンマ関数を $-5.0 \sim 5.0$ の範囲内で計算した結果を Figure 2.1 に示す. Figure 2.1 から, ガンマ関数は正の引数のときには引数の値が増加すると共に計算値が増加していくことが確認できる. また, 負の引数では整数のときに発散してしまっているが, 複素関数論の解析接続により, (2.8) 以外の形式のガンマ関数はないということが証明されているためこの定義を用いるほかない. (2.8) を複素数を適用し, 計算されたガンマ関数の大きさを示した 3 次元グラフを Figure 2.2 に示す.

ガンマ関数の基本的な性質の 1 つに次のものがある

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.9)$$

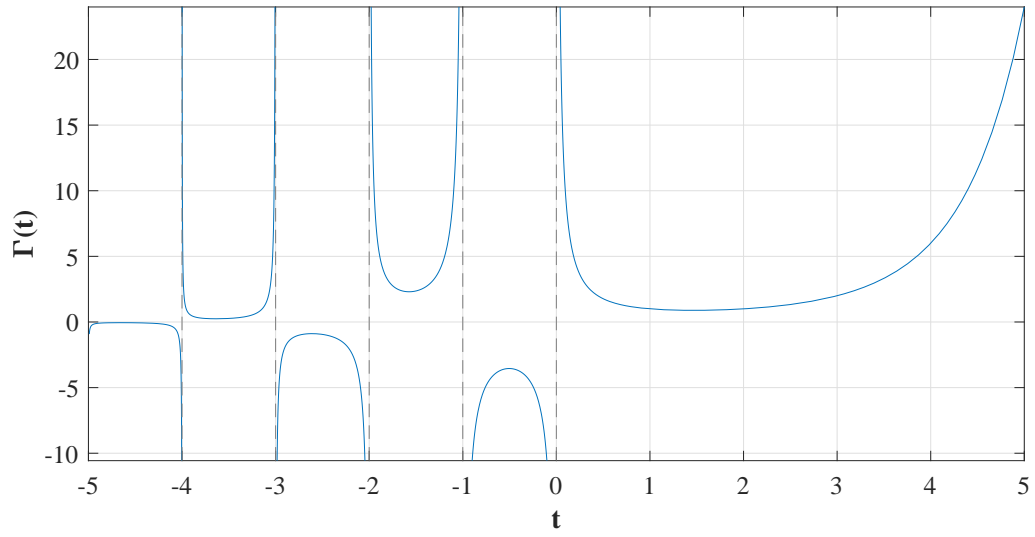


Figure 2.1 The gamma function.

これは (2.6) より簡単に計算できる,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt \\
 &= [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\
 &= z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\
 &= z \Gamma(z).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

また,

$$\Gamma(1) = 1 \tag{2.11}$$

と (2.9) を使うことで, $z = 1, 2, 3, \dots$ のときガンマ関数は $n!$ で書き表すことが可能である

$$\begin{aligned}
 \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!, \\
 \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!, \\
 \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!, \\
 &\vdots \\
 \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!.
 \end{aligned}$$

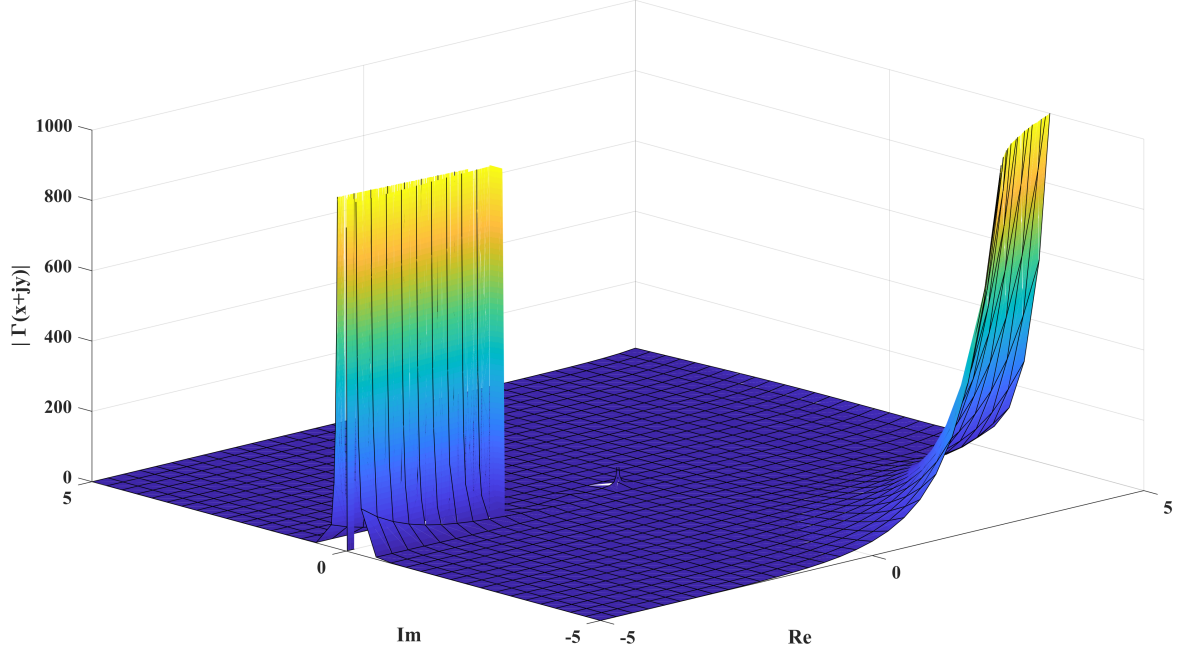


Figure 2.2 The Gamma function applied complex numbers.

2.1.3 Mittag-Leffler 関数

指数関数 e^z は整数階微積分の理論の中で重要な役割を持っている．それを 1 つのパラメータで一般化した関数は [73] によって次のように記述され

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2.12)$$

G. M. Mittag-Leffler[75, 76, 77] により導入され, A. Wiman[78, 79] により研究されている．また, (2.12) において, $\alpha = 1$ のときは,

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\ &= e^z, \end{aligned} \quad (2.13)$$

指数関数 e^z と等価となる (Figure 2.3).

2 パラメータタイプの Mittag-Leffler 関数は [73] の級数展開により (2.14) で定義される

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (2.14)$$

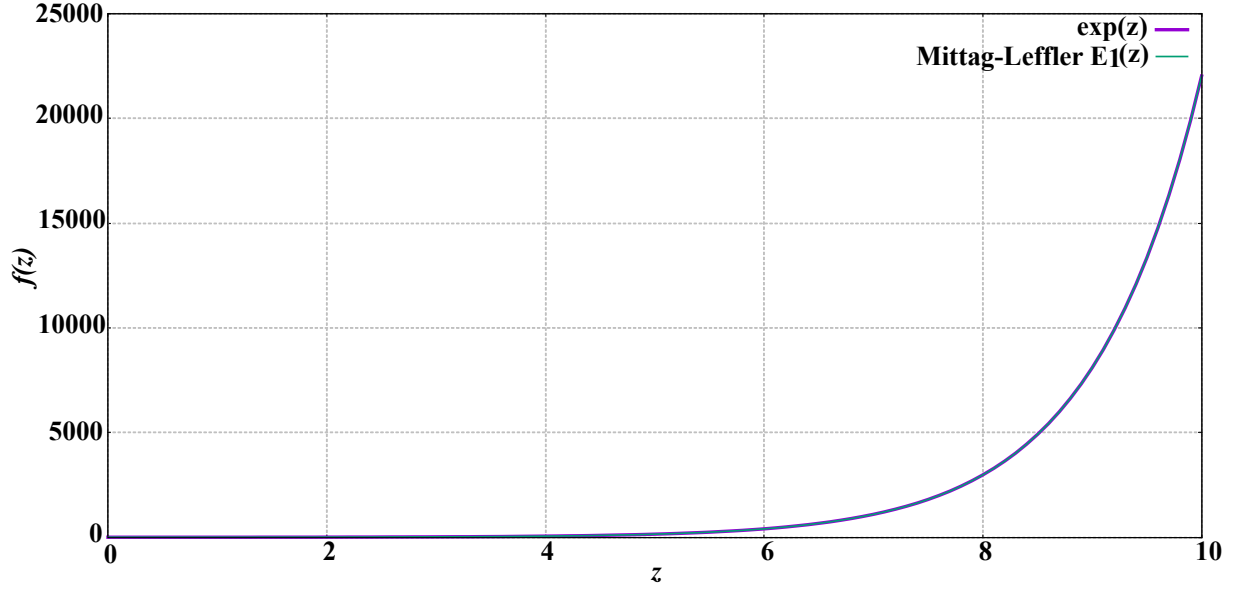


Figure 2.3: 1 parameter Mittag-Leffler function at $\alpha = 1$ compared with the exponential function.

定義 (2.14) から,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (2.15)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (2.16)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad (2.17)$$

と計算でき, また α が 1 の時の Mittag-Leffler 関数は

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right). \quad (2.18)$$

と一般化できる. 双曲線正弦関数や余弦関数もまた Mittag-Leffler 関数で表すことができる:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \quad (2.19)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (2.20)$$

$\alpha = 1/2$ であるとき,

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z), \quad (2.21)$$

を得ることができ, $\operatorname{erfc}(z)$ は次式で定義される誤差関数である:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt. \quad (2.22)$$

$\beta = 1$ であるとき, 2 パラメータ Mittag-Leffler 関数は 1 パラメータ Mittag-Leffler 関数と等価となる:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z). \quad (2.23)$$

次に, 2 パラメータをさらに拡張し, より一般化したものとして次の Mittag-Leffler 関数がある:

$$E_{\alpha,\beta}^\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.24)$$

ただし, (2.24) 中の $(\rho)_k$ は Pochhammer symbol であり,

$$(\rho)_k = \rho(\rho+1)\dots(\rho+k-1), \quad (2.25)$$

で計算される. この Mittag-Leffler 関数は一般化 Mittag-Leffler 関数または 3 パラメータ Mittag-Leffler 関数と呼ばれている. $\rho = 1$ のとき, (2.24) は 2 パラメータの Mittag-Leffler 関数と等価となる:

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}^1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (2.26)$$

各 Mittag-Leffler 関数の整数階微分は 3 パラメータ Mittag-Leffler 関数を用いて以下のように表される ($n \in \mathbb{N}$):

- 1 パラメータ Mittag-Leffler 関数

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_\alpha = n! E_{\alpha,1+n\alpha}^{n+1}(z), \quad (2.27)$$

- 2 パラメータ Mittag-Leffler 関数

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_{\alpha,\beta}(z) = n! E_{\alpha,\beta+n\alpha}^{n+1}(z), \quad (2.28)$$

- 3 パラメータ Mittag-Leffler 関数

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_{\alpha,\beta}^\rho = (\rho)_n E_{\alpha,\beta+n\alpha}^{\rho+n}(z). \quad (2.29)$$

2.2 分数階微積分の定義

本節では、これまでに定義されてきた数ある分数階微積分の中でも特に有名であり、よく使用されている定義である、Grünwald-Letnikov の定義、Riemann-Liouville の定義、そして Caputo の定義について説明する。

2.2.1 Grünwald-Letnikov の定義

本小節では Grünwald-Letnikov の分数階微積分を説明する。はじめに Grünwald-Letnikov の分数階積分を求め、その後微分を求める。

整数階微分と積分の統一

(2.1)-(2.4) の整数階微分を分数階へと拡張することを考えるために、次の式を用いる：

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh), \quad (2.30)$$

ただし、 p, n は任意の整数である。

$p \leq n$ である間、明らかに

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(T) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}, \quad (2.31)$$

であり、この場合、(2.5) から、すべての $\binom{p}{p}$ 以後の分子の係数は 0 に等しいからである。

次に p が負の値のときを考える。便宜上、

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1) \cdots (p+r-1)}{r!}, \quad (2.32)$$

を示す。そうすると、

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1) \cdots (-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

と表すことができ、(2.30) 内の p を $-p$ に置き換えると次式のように書くことができる：

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh), \quad (2.34)$$

ただし p 自体は正の整数とする。

もし n が定まっていた場合, その時 $f_h^{(-p)}(t)$ は $h \rightarrow 0$ の極限において 0 に行く傾向がある. 極限値を 0 としないために, $h \rightarrow 0$ として $n \rightarrow \infty$ が提案されている. これにより, a を実数として $h = \frac{t-a}{n}$ と設定でき, $f_h^{(-p)}(t)$ の有限もしくは無限の極限値を考えることができ, これを

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (2.35)$$

のように示す. ここで示した ${}_a D_t^{-p} f(t)$ は, 実際には, 関数 $f(t)$ に対して行われるある特定の操作のことであり, a, t は両端値でありこの操作における制限となっている.

いくつかの特別な場合を考える.

$p = 1$ のとき,

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t - rh). \quad (2.36)$$

$t - nh = a$ と関数 $f(t)$ は連続であると仮定されることを考慮すると,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (2.37)$$

$p = 2$ の場合では,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2 + r - 1)}{r!} = r + 1$$

であり,

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^n (rh) f(t - rh). \quad (2.38)$$

$t + h = y$ とすると次式のように書くことができる:

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(t - rh), \quad (2.39)$$

そして $h \rightarrow 0$ とした時に $y \rightarrow t$ となることから,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-2)}(t) &= {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t - z) dz \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.40)$$

続いて, 3 番目の場合, つまり $p = 3$ のときには, ${}_a D_t^{-p}$ の一般式を示すことになる.

以下の式:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3 + r - 1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2},$$

を考慮に入れると,

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2)h^2 f(t-rh). \quad (2.41)$$

上記より, $t+h=y$ とすると

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} rh f(y-rh). \quad (2.42)$$

ここで $n \rightarrow 0$ の極限をとると,

$${}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z) dz = \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau, \quad (2.43)$$

となり, これは $h \rightarrow 0$ とした時に $y \rightarrow 0$ となることと, 次式のためである:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} rh f(y-rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau = 0.$$

(2.37)-(2.43) の関係から以下の一般式を求められる:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t f(t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.44)$$

(2.44) の形式を積分から得るために, ある値 p に対して成り立つことを示す, その時それはまた, $p+1$ に対してもである.

ここで, 次式の関数を導入する:

$$f_1(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau, \quad (2.45)$$

この式は明らかに $f_1(a) = 0$ である性質を持つ, そして次式を考える:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-(r+1)h). \end{aligned} \quad (2.46)$$

(2.32) を使うことで容易に検証できる,

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

ただし次式の関係をおく.

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

(2.47) の関係を (2.46) 中のはじめの総和項に適用し, 2 項目の総和項の r を $r-1$ に置き換えると次式が与えられる:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p-1}f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &= {}_aD^{-p}f_1f(t) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t-(n+1)h) \\ &= {}_aD^{-p}f_1f(t) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right). \end{aligned}$$

関数 $f_1(t)$ の定義 (2.45) から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0.$$

となる. 極限 (2.8) を考慮すると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n^p n!} \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+1)}, \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p-1}f(t) &= {}_aD_t^{-p}f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau) d\tau \\ &= - \frac{(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{2.48}$$

を得られ, これは積分による (2.44) の証明となる.

さて, (2.44) で示したのは p 階の積分である.

積分関係は a から t にかけて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left({}_a D_t^{-p} f(t) \right) &= \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau) d\tau \\ &= {}_a D_t^{-p+1} f(t)\end{aligned}$$

であり, 以下の関係となり,

$$\begin{aligned}{}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+1} f(t) \right) dt, \\ {}_a D_t^{-p+1} f(t) &= \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+2} f(t) \right) dt, \text{ etc.},\end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned}{}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+2} f(t) \right) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+3} f(t) \right) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \dots \int_a^t}_{p \text{ times}} f(t) dt.\end{aligned}\tag{2.49}$$

となる.

これまでに確認した連続関数 $f(t)$ の整数階 n の微分 (2.4) と p 解の積分 (2.44) は次式の一般式の特例である:

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh),\tag{2.50}$$

この式は $p = m$ のときは m 階の微分, $p = -m$ のときは m 階の積分を示している.

この確認は (2.50) の p を任意の実数または複素数にすることさえ可能であれば微分と積分の概念の一般化の考えとなる. 続いては実際の p の値に着目していく.

Grüwald-Letnikov の分数階積分

$p < 0$ の場合を考える. 便宜上, (2.50) 中の p を $-p$ と置く. そのとき (2.50) は次式となり,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh),\tag{2.51}$$

ただし, 上式のように, h と n の値を $nh = t - a$ のように関連付ける.

(2.51) 中の極限の存在を証明することと極限を評価するために以下の定理が必要である (A. V. Letnikov, [80]):

定理 1

数列 $\beta_k, (k = 1, 2, \dots)$ とし

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1, \quad (2.52)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0 \text{ for all } k, \quad (2.53)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = A \text{ for all } k, \quad (2.54)$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| < K \text{ for all } n \quad (2.55)$$

と仮定する. そのとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A. \quad (2.56)$$

□ 証明 1

条件 (2.52) から

$$\beta_k = 1 - \sigma_k, \quad \text{where } \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0 \quad (2.57)$$

と置く. 条件 (2.53) からすべての一定の r に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} \beta_k = 0 \quad (2.58)$$

となり, そして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} = 0. \quad (2.59)$$

(2.54), (2.57)-(2.59) を使うことで

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \beta_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \sigma_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \sigma_k \\ &= A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \sigma_k \end{aligned}$$

を得る.

ここで, (2.59) と (2.55) を用いることで, 次の概算ができる:

$$\begin{aligned}
\left| A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \beta_k \right| &< \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n |\alpha_{n,k}| \cdot |\sigma_k| \\
&< \sigma^* \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n |\alpha_{n,k}| = \sigma^* \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| \\
&< \sigma^* K
\end{aligned}$$

ただし, $\sigma^* = \max_{k \geq r} |\sigma_k|$

(2.57) から 各任意の $\epsilon > 0$ に対して $\sigma^* < \epsilon/K$ のような r が存在すると,

$$\left| A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k \right| < \epsilon,$$

となり, (2.56) は定理が成立することを示す. ■

極限 (2.51) の評価に対して定理 1 を適用するため,

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{1}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t - rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t - rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right)
\end{aligned}$$

とし, また

$$\begin{aligned}
\beta_r &= \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}, \\
\alpha_{n,r} &= \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right)
\end{aligned}$$

とする.

(2.8) を用いることで

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = 1. \tag{2.60}$$

を得る.

明らかに, 閉区間 $[a, t]$ において関数 $f(t)$ が連続である場合,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \alpha_{n,r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n h(rh)^{p-1} f(t - rh) \\ &= \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.\end{aligned}\tag{2.61}$$

(2.60) と (2.61) を考慮し, 定理 1 を適用すると

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.\tag{2.62}$$

が成立する.

もし区間 $[a, t]$ において微分 $f'(t)$ が連続である場合, そのとき部分積分により (2.62) を

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t - \tau)^p f'(\tau) d\tau,\tag{2.63}$$

で書くことができ, そしてもし関数 $f(t)$ が $m+1$ 階の連続的な微分を持つ場合,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t - \tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau\tag{2.64}$$

となる.

Grüwald-Letnikov の分数階微分

$p > 0$ の場合を考える. 目的は上記のように, 次の極限を評価することである:

$${}_a D_t^p = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t)\tag{2.65}$$

ただし

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t - rh).\tag{2.66}$$

極限 (2.65) を評価するために, まず $f_h^{(p)}(t)$ の式を以下のように変形する.

二項係数の性質を用いて

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p-1 \\ r-1 \end{pmatrix},\tag{2.67}$$

これより,

$$\begin{aligned} f_h^{(p)}(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) \\ &\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(t-rh) \\ &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) \\ &\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-(r+1)h) \\ &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) \\ &\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} \Delta f(t-rh) \end{aligned} \tag{2.68}$$

と書け, ただし

$$\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h).$$

明らかに, $\Delta f(t-rh)$ は $\tau = t-rh$ における関数 $f(\tau)$ の 1 次後退差分である.

二項係数の性質 (2.67) を m 回繰り返し適用すると, (2.68) から以下の関係を得る:

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= (-1)^n \begin{bmatrix} p-1 \\ n \end{bmatrix} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} p-2 \\ n-1 \end{bmatrix} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{p-2}{r} \Delta^2 f(t-rh) \\
&= (-1)^n \begin{bmatrix} p-1 \\ n \end{bmatrix} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} p-2 \\ n-1 \end{bmatrix} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&\quad + (-1)^{n-2} \binom{p-3}{n-3} h^{-p} \Delta^2 f(a+2h) \\
&\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-3} (-1)^r \binom{p-3}{r} \Delta^3 f(t-rh) \tag{2.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
&\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh). \tag{2.70}
\end{aligned}$$

(2.70) 内の 1 項目の総和項の k 項目の極限を評価してみる:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&\quad \times \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= (t-a)^{-p+k} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}, \tag{2.71}
\end{aligned}$$

これは (2.8) が

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2) \dots (-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!} \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}
\end{aligned}$$

を与え, そして

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} = 1, \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^{(k)}(a)
\end{aligned}$$

となるためである.

(2.70) 内の二項目の極限を評価するために次式のように書く:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} \\
& \quad \times h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

定理 1 を適用するために

$$\begin{aligned}
\beta_r &= (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p}, \\
\alpha_{n,r} &= h(rh)^{m+p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}, \quad h = \frac{t-a}{n},
\end{aligned}$$

とする.

(2.8) を用いると

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r = \lim_{r \rightarrow \infty} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} = 1, \tag{2.73}$$

と検証できる. さらに, もし $m-p > -1$ であるとき

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-m-1} \alpha_{n,r} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n-m-1} h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} \\
&= \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

(2.73) と (2.74) を考慮し定理 1 を適用すると

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh) \\ = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.75)$$

と結論付けることができる.

また, (2.71) と (2.75) を用いることで最終的に (2.65) の極限は次式と求めることができる:

$$\begin{aligned} {}_a^{GL}D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.76)$$

(2.76) は次の仮定のもと得られるものである. 閉区間 $[a, t]$ において微分 $f^{(k)}(t)$, $(k = 1, 2, \dots, m+1)$ が連続であり, 条件 $m > p - 1$ を整数 m が満たしているときに得られる. m に対して可能な限りの最小な値は次の不等式によって定まる.

$$m < p < m + 1.$$

2.2.2 Riemann-Liouville の分数階微積分

ある関数 $f(t)$ の区間 $[a, t]$ における 1 階の積分は微積分作用素 D を用いると次式で与えられる.

$$D^{-1}f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (2.77)$$

同様に 2 階の積分は

$$D^{-2}f(t) = \int_a^t \int_a^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1, \quad (2.78)$$

で与えられ, これの n 階の積分は次式の畳み込み積分を計算することになる.

$$D^{-n}f(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \quad (2.79)$$

(2.79) を書き換えると Cauchy の反復積分公式となる:

$$D^{-n}f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.80)$$

(2.80) において $(n-1)!$ の階乗が表れていることが確認できる. この階乗の計算を整数だけではなく, 実数でも定義することが可能であるならば, 分数階の積分を表現することが可能である

と考えられる．階乗を整数から実数へと拡張するためには，それぞれの整数の階乗間，つまりは $0!, 1!, 2!, \dots$ の間を円滑につなげる必要がある．このような“整数の階乗を実数の階乗へと拡張する関数”として，Gamma 関数が定義されている．Riemann-Liouville の分数階積分が次式のように定義されている．

定義 1 (Riemann-Liouville の分数階積分 [70])

$f(t)$ の n 階積分の式を実数に拡張し， q 階の Riemann-Liouville の分数階積分の式が次式のように定義される．

$${}_a^{RL}D_t^{-q}[f(t)] = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(\tau) d\tau. \quad (2.81)$$

この積分において，積分階数の加法性が次のように成り立つことが知られている．

$${}_a^{RL}D_t^{-q_2} \left[{}_a^{RL}D_t^{-q_1}[f(t)] \right] = {}_a^{RL}D_t^{-q_1-q_2}[f(t)]. \quad (2.82)$$

2.2.3 Riemann-Liouville の分数階微分

2.2.2 節では，Riemann-Liouville の分数階積分を，整数階の積分から Gamma 関数による階乗の実数への拡張とともに説明した．

さて，微分を積分の逆操作と見なせば，分数階微分は分数階の積分階数を負にしたものと考えることが可能だが，前述した Riemann-Liouville の分数階積分の積分階数を負にして計算しても解を得ることができない．以下にその計算例を示す．

$${}_a^{RL}D_t^q[f(t)] = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} f(\tau) d\tau, \quad (2.83)$$

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ より，

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} f(\tau) d\tau = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{(-q)^{-1}\Gamma(1-q)} f(\tau) d\tau. \quad (2.84)$$

これを部分積分を用いて計算すると，

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q-1}}{(-q)^{-1}\Gamma(1-q)} f(\tau) d\tau = \left[\frac{(t-\tau)^{-q}}{(-q)^{-1}\Gamma(1-q)} f(\tau) \right]_a^t - \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-q}}{(-q)^{-1}\Gamma(1-q)} f^{(1)}(\tau) d\tau, \quad (2.85)$$

となり， $(t-\tau)^{-q}$ に t をそのまま代入すると無限大に発散してしまうため，分数階微分を得ることができない．

しかし，Abel の積分方程式の解法を用いることで，分数階微分を得ることが可能となる．Abel の解法を得るに至った研究問題を，分数階微分を同様の形式の問題に置き換えて導出する．今回は簡単化のため，階数を $0 < q < 1$ として，以下のように既知の関数 $g(t)$ と未知の関数 $f(t)$ が与えられるとする．

$$\int_a^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{\Gamma(p)} f(\tau) d\tau = g(t). \quad (2.86)$$

このとき, $g(t)$ は $f(t)$ を分数階積分した関数 ($g(t) = {}^RL_a I_t^p[f(t)]$) とみなすことができ, $f(t)$ は $g(t)$ を分数階微分した関数 ($f(t) = {}^RL_a D_t^p[g(t)]$) と考えられる. つまり, $g(t)$ をどのように演算処理を施せば $f(t)$ を表現できるかを示すことで, 分数階微分を表現できるといえる. Abel の積分方程式の解法に従って求めた, $g(t)$ を用いた $f(t)$ を次式に示す.

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{-p}}{\Gamma(1-p)} g(\tau) d\tau. \quad (2.87)$$

このようにして, $g(t)$ を分数階微分した $f(t)$ を得られた. 式 (2.87) を見ると, $f(t)$ は $g(t)$ を $1-p$ 階積分した後に 1 階微分していることがわかる. 以上より, 分数階微分について次の定義が得られる.

定義 2 (Riemann-Liouville の分数階微分)

関数 $f(t)$ が $[a, \infty)$ において区間連続かつ積分可能であるとする. この時, $f(t)$ の q 階の Riemann-Liouville の分数階微分は (2.89) により定義される.

$$\begin{aligned} {}^{RL}_a D^q f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} g(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} [f(t) * \Phi_{n-q}(t)] \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[{}^{RL}_a D_t^{-(n-q)}[g(t)] \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

ただし, $n < q < n+1$ である.

そして, Riemann-Liouville の分数階積分 (2.81) と分数階微分 (2.88) は 1 つの定義式にまとめることができる.

定義 3 (Riemann-Liouville の分数階微積分の定義)

関数 $f(t)$ が $[a, \infty)$ において区間連続かつ積分可能であるとする. このとき, $f(t)$ の q 階の Riemann-Liouville の分数階微積分は (2.89) で定義される.

$${}^{RL}_a D^q f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} g(\tau) d\tau, \quad (2.89)$$

ただし, 積分のときは $n = 0, q < 0$ であり, 微分のときは $n < q < n+1$ である.

2.2.4 Caputo の分数階微分

2.2.3 小節まで, Riemann-Liouville の分数階微積分について説明してきた. しかしながら, この定義では, 微積分の初期値が 0 でない場合では, 分数階微分の初期値を任意に決めることができない問題があり, 物理現象に対して Riemann-Liouville の分数階微積分を導入することを考えたとき, 物理的な対応関係に不明瞭な点が生じてしまう問題があった. Caputo はこの初期値問題を解決するために新たに分数階微分の定義を提案した [71, 72].

定義 4 (Caputo の分数階微分の定義)

$f(t)$ が区間 $[a, t]$ で C^n 級関数であるとき, q 階微分する Caputo の分数階微分は (2.90) で定義される.

$${}_a^C D_t^q f(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (2.90)$$

ただし, $n = \lceil q \rceil$ であり, a は開始点を表す.

また, Caputo の分数階微分では Riemann-Liouville の分数階微分では成立しない, 微分階数の加法性が成立する.

定理 2

$t < a$ において $f(t) = 0$ となる関数 $f(t)$ に対して, Caputo の分数階微分は任意の実数 α, β で次式が成立する.

$${}_a^C D_t^\beta [{}_a^C D_t^\alpha [f(t)]] = {}_a^C D_t^\alpha [{}_a^C D_t^\beta [f(t)]] = {}_a^C D_t^{\alpha+\beta} [f(t)]. \quad (2.91)$$

Caputo の分数階微分の定義は, 先にも述べたように Riemann-Liouville の分数階微分の初期値問題を解決するために提案されたことから, 初期値を任意に設定できるため, 広く工学的な分野において採用されている.

以上から, 本研究では, 分数階微分に Caputo の定義を採用することとし, 今後, 論文内で記載される分数階微分を表す, $D^q[f(t)], f^{(q)}(t), df^q/dt^q$ などの微分作用素は, Caputo の分数階微分を使用しているものとする.

3. 横滑りを考慮した蛇型ロボットの推進制御

本章は、蛇型ロボットを対象として、路面との摩擦力を十分に確保することが難しい環境下においても、横滑りを抑制しながら推進する制御系の実現を目指す。また、摩擦モデルを分数階へ拡張することで詳細な挙動を実現可能であるか検証する。蛇は進行方向に対し横方向への摩擦を十分に確保することで推進する。同様の移動特性を持つ蛇型ロボットは推進時に横方向への摩擦を十分に確保できない場合、横滑りが発生し、所望する方向に推進できない場合がある。そこで横滑り発生時に横滑りを抑制し、蛇型ロボットに推進するのに必要な摩擦を確保することで湿地・砂地といった軟弱地盤でも推進できる蛇型ロボットの実現を目指す。

横滑りを抑制することで、より多くの路面で推進ができるようになり、活躍の場所が広がる。1980年代後半から、危険な場所、狭い場所といった人の立ち入りが困難な環境において、人に代わり探索するロボットが注目されている [81, 82]。蛇型ロボットは瓦礫といった不整地や狭所に進入可能な調査ロボットとして期待されている [83]。災害地での利用を目指した蛇型ロボットの研究としては障害物の考慮など路面の形状に応じた推進制御は数多く研究されているが、滑りやすさといった路面の性質に応じた制御に関する研究は少ない。[84, 85, 86]。そこで、本章では土砂や瓦礫などが散乱する滑りやすい路面を想定し、横滑りを抑制することで目標位置への到達を実現する。この方法を将来的に3次元空間内の起伏に適用することで一般的な路面での推進制御につながることを期待できる。本章はその基礎検討として路面の形状は2次元平面に限定する。

蛇型ロボットに対し、横滑りを許容した制御系は提案されているが、横滑りを積極的に抑制する研究はほとんど提案されていない。横滑りを許容した制御系として目標軌道への追従精度向上を目指して、蛇型ロボットの横滑りを利用する推進制御手法が提案されている [87]。Matsumo らは一部のリンクを持ち上げ、持ち上げたリンクが横方向に移動できるようにし、目標軌道に応じて持ち上げるリンクを切り替え、リンクの自由度を増加させることで目標軌道への追従精度向上を提案している。その効果をシミュレーションと実機によって確認している。しかし、この研究では路面に接地するタイヤは横滑りしないと仮定している。

横滑りを抑制する先行研究として路面の摩擦が未知であるという条件において、蛇型ロボットの横滑りを検知、抑制する推進制御手法が提案されている。Nansai らは、State Dependant Riccati Equation (SDRE) [88, 91] に基づいた I 型オブザーバを用いて、各リンクの横方向速度を数値計算により推定し、推定速度に応じて、横滑りするモデルと横滑りしないモデルを切り替えながら横滑りを抑制する制御系を構築している [89]。この制御手法を用いたシミュレーションによって、路面の摩擦が変化しても蛇型ロボットが横滑りを抑制し、目標位置に対して先頭位置を追従させることに成功している。しかし、横滑りの誤検知といった課題が残っている。誤検知の原因は横滑りした、横滑りしない2つのモデルを切り替える条件が十分に記述しきれてないためである。また、これは複雑で難しい問題である。

そこで、本章ではモデルを切り替えることなく、蛇型ロボットの状態を表現できるモデルを考える。そのために、路面との間に働く摩擦力を考慮しない蛇型ロボットのモデルを導出し、これに横滑りしないという拘束条件の代わりとして摩擦を導入する。このモデルを用いて横滑りを抑制できる制御系を構築することで先行研究の残された課題を解決する。

以上より、本章では摩擦力を付加したモデルを用いて横滑りを抑制する推進制御を提案し、手法の妥当性をシミュレーションを通して検証する。はじめに、横滑りしないという拘束の代わりに摩擦を導入したモデルを構築することで、横滑りした／しないというモデルの切り替えをすることなく、蛇型ロボットの挙動を捉える。次に、蛇型ロボットに横滑りが発生した際に、横滑りを抑制しながら推進する制御系を設計する。この制御系に必要な蛇型ロボットの速度、角速度は、センサの搭載スペースやコストの問題から直接観測できないため、オブザーバを構築してこれらの状態を推定する。最後に数値シミュレーション上で提案手法の妥当性を検証する。本手法を適用した場合と適用しなかった場合の結果を比較し、提案モデルに基づく制御系が従来のモデルを用いた制御系では推進できない条件においても推進できることを示す。

1 節ではまず 2 次元平面上でのダイナミクスを Projection Method によって導出する。ロボットが横滑りしうることを表現するために、従来研究で導入していた「体幹と垂直方向へは滑らない」という拘束の代わりにクーロン摩擦と粘性摩擦を導入する。これにより、摩擦力が支配的になる場合には横滑りしない状態を、横方向力が支配的になる場合には滑り状態を表現することができる。

2 節では制御に必要な状態を推定するオブザーバの設計法を示す。オブザーバは導出した蛇型ロボットの State-Dependent Coefficient form[88, 91](以下 SDC 形)をベースに設計する。蛇型ロボットの先頭位置と各関節角度のみが観測できるとしてオブザーバを設計し、システムの状態を推定できることを確認する。

3 節では横滑りを抑制しつつ蛇型ロボットを推進させる制御系設計について述べる。制御系のベースは従来研究で扱われている SDRE[88, 91, 90] による先頭位置制御系を基本とする。ただし、評価関数が横滑りが発生したときに横滑りを押さえるように働くようにする。4 節では数値シミュレーションによって提案手法の有効性を検証し、最後に結言を与える。

3.1 5 リンク蛇型ロボットのモデリング

本節では Projection Method (以下 PJ 法) [92, 93, 94] を用いて、横滑りが発生し得る 5 リンク蛇型ロボットのモデルを導出する。蛇型ロボットは複数リンクがジョイントを介して直列に接続されている。PJ 法とは、システムを無拘束として運動方程式を導出し、これに拘束条件を導入することで、拘束後のシステムの運動方程式を導出する方法である。

本節のモデリングは PJ 法に従い、まず 5 つのリンクを無拘束として運動方程式を立てる。次に各リンクがジョイントを介して直列に接続される拘束条件を記述する。この時、横滑りしない従来モデル [95] では、横滑りしないという拘束条件も導入していた。本節ではこの拘束条件の代わりに、一般化力に摩擦を導入する。最後に運動方程式と拘束条件を合わせることで、拘束後の運

動方程式を導出する.

3.1.1 無拘束時の運動方程式

5 リンク蛇型ロボットのモデルを Figure 3.1 で定義する. 物理パラメータを Table 3.1, 位置や

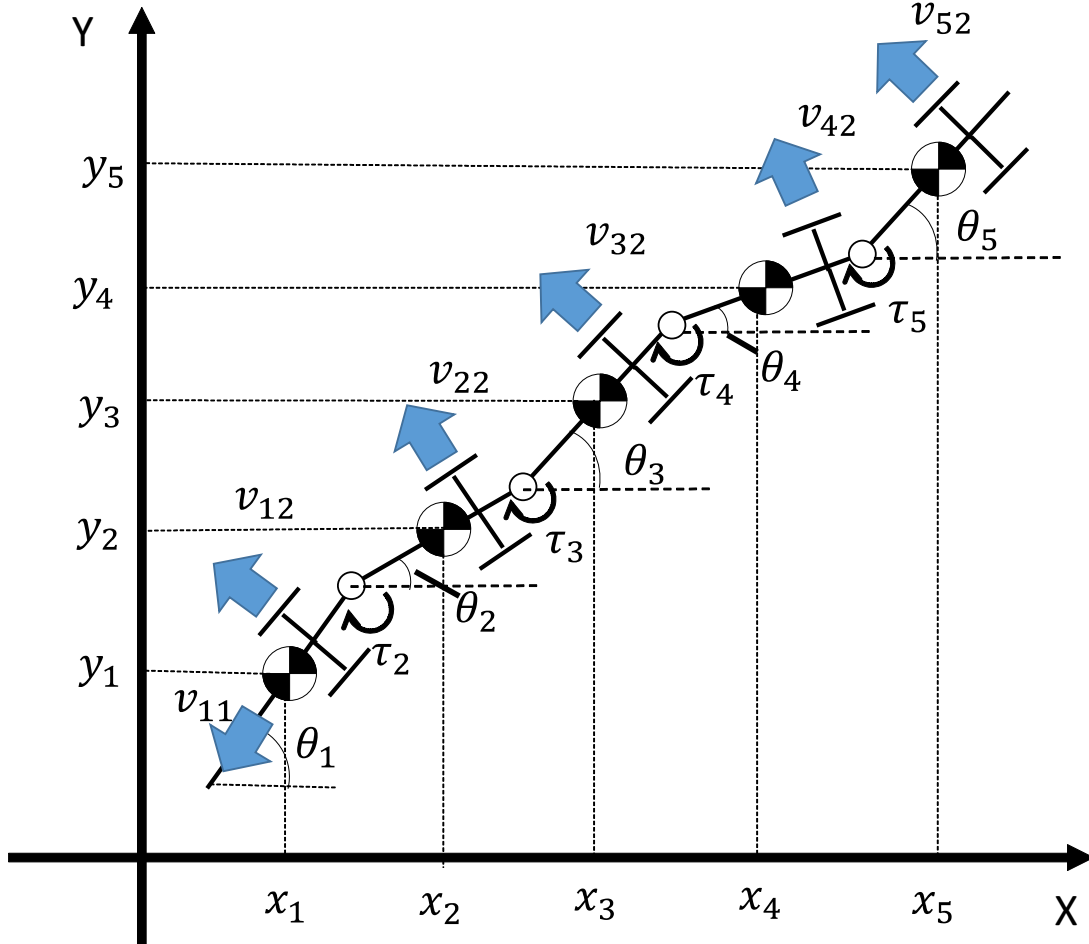


Figure 3.1 Schematic model of 5 links snake-like robot

姿勢を表す変数を Table 3.2 に示す. Figure 3.1 における一般化座標 \mathbf{q}_a を次式で定義する.

$$\mathbf{q}_a = [\mathbf{q}_{a1}^T, \mathbf{q}_{a2}^T, \mathbf{q}_{a3}^T, \mathbf{q}_{a4}^T, \mathbf{q}_{a5}^T]^T, \quad \mathbf{q}_{ai} = [\theta_i, x_i, y_i]^T$$

この蛇型ロボットでは, リンクをつなぐジョイントに 1 自由度の回転モータが搭載されている. 各モータのトルクを τ_i ($i = 2 \sim 5$) とする.

各リンクの姿勢角変化に関する角速度を ω_i , 推進方向の速度を w_{i1} , 推進方向に対する法線方向の速度を w_{i2} とし, 擬速度 \mathbf{v} を次式で定義する.

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \mathbf{v}_3^T, \mathbf{v}_4^T, \mathbf{v}_5^T]^T, \quad \mathbf{v}_i = [\omega_i, w_{i1}, w_{i2}]^T$$

Table 3.1 Physical Parameters

パラメータ	記号
慣性モーメント	J_i
質量	m_i
重力加速度	g
回転軸に対する粘性摩擦係数	c_i
横方向の速度に対する粘性摩擦係数	c_{i2}
横方向にかかるクーロン摩擦係数	μ_i
リンクの先頭から重心までの長さ	d_i
リンクの重心から後尾までの長さ	l_i
リンクの重心から車軸までの長さ	r_i

Table 3.2 Variables

変数	記号
i リンク目の角度	θ_i
i リンク目の x 座標	x_i
i リンク目の y 座標	y_i

擬速度ベクトル \mathbf{v} と一般化座標 \mathbf{q}_a の関係を表す座標変換行列 \mathbf{A}_a を次式で定義する.

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{A}_a \mathbf{v} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A}_a = \text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5)$$

$$\mathbf{A}_i := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

無拘束の運動方程式を次式で定義する.

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{h}_a \quad (3.2)$$

ここで, \mathbf{M}_a を一般化質量, \mathbf{h}_a を一般化力とする. \mathbf{M}_a , \mathbf{h}_a は次式で表される.

$$\mathbf{M}_a = \text{diag}(J_1, m_1, m_1, J_2, m_2, m_2, \\ J_3, m_3, m_3, J_4, m_4, m_4, J_5, m_5, m_5)$$

$$\mathbf{h}_a = \begin{bmatrix} -c_1\dot{\theta}_1 + c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - \tau_2 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_2 - c_2(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) + c_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) - \tau_3 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_3 - c_3(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3) + c_4(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3) - \tau_4 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_4 - c_4(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_4) + c_5(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_4) - \tau_5 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_5 - c_5\dot{\theta}_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3.1) を微分することで、 $\ddot{\mathbf{q}}_a$ は次式で表される。

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \dot{\mathbf{A}}_a \mathbf{v} + \mathbf{A}_a \dot{\mathbf{v}} \quad (3.3)$$

(3.3) を利用して (3.2) を擬速度系へ座標変換する。

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{h}_b, \mathbf{M} := \mathbf{A}_a^T \mathbf{M}_a \mathbf{A}_a, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{h}_b := \mathbf{A}_a^T \mathbf{h}_a - (\mathbf{A}_a)^T \mathbf{M}_a \dot{\mathbf{A}}_a \mathbf{v} \quad (3.5)$$

(3.4) で導出された無拘束時蛇型ロボットの運動方程式に対し、各リンクの進行方向に対して法線方向に作用する摩擦力を導入する。本節では、粘性摩擦とクーロン摩擦を考える。これが従来の横滑りしない拘束 [89, 96] の代わりとなるものである。横滑りしないという条件の緩和という観点では、静摩擦や stick-slip 効果 [97] を導入するべきという意見もあろう。しかしながら、実機を注意深く観察してみると、進行方向に比べて法線方向には滑りづらくなっているが、実際に横滑りは発生している。このことから、本節では蛇型ロボットの推進制御に関して支配的に関与するのは動摩擦であり、進行方向とその法線方向の動摩擦力の差をうまく利用することを制御系設計に取り入れるという立場をとる。

各リンクに対して、 c_{i2} を進行方向に対する法線方向への粘性摩擦係数、 μ_i を同方向へのクーロ

摩擦係数とする。摩擦力を追加した後の一般化力 \mathbf{h} を次式に示す。

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_b + \mathbf{h}_f \quad (3.6)$$

$$\mathbf{h}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu_1 m_1 g \cdot \text{sgn}(w_{12}) - c_{12}(w_{12} + r_1(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)) \\ 0 \\ 0 \\ -\mu_2 m_2 g \cdot \text{sgn}(w_{22}) - c_{22}(w_{22} + r_2(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)) \\ 0 \\ 0 \\ -\mu_3 m_3 g \cdot \text{sgn}(w_{32}) - c_{32}(w_{32} + r_3(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3)) \\ 0 \\ 0 \\ -\mu_4 m_4 g \cdot \text{sgn}(w_{42}) - c_{42}(w_{42} + r_4(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_4)) \\ 0 \\ 0 \\ -\mu_5 m_5 g \cdot \text{sgn}(w_{52}) - c_{52}(w_{52} + r_5(-\dot{\theta}_5)) \end{pmatrix}$$

上式において、 i リンク目のクーロン摩擦が作用する向きは、法線方向の速度 w_{i2} の符号に応じて切り替わる。

3.1.2 拘束力行列の計算

各リンクが1自由度の回転ジョイントを介して接続されているという拘束条件を付加した運動方程式を導出する。それに先立ち、拘束条件の記述、擬速度と接速度の関係を求める。

i リンク目の後尾と $(i+1)$ リンク目の先頭が1自由度の回転ジョイントを介して繋がっている拘束条件 ($i = 1 \sim 4$) は次のように記述できる。

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + d_{i+1} \cos \theta_{i+1} + l_i \cos \theta_i \\ y_{i+1} &= y_i + d_{i+1} \sin \theta_{i+1} + l_i \sin \theta_i \end{aligned}$$

ホロノミック拘束行列 Φ_h を導入し、上述の拘束条件を $\Phi_h = \mathbf{0}$ を満たすように変形する。

$$\Phi_h = \begin{bmatrix} -d_2 \cos \theta_2 - l_1 \cos \theta_1 - x_1 + x_2 \\ -d_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1 - y_1 + y_2 \\ -d_3 \cos \theta_3 - l_2 \cos \theta_2 - x_2 + x_3 \\ -d_3 \sin \theta_3 - l_2 \sin \theta_2 - y_2 + y_3 \\ -d_4 \cos \theta_4 - l_3 \cos \theta_3 - x_3 + x_4 \\ -d_4 \sin \theta_4 - l_3 \sin \theta_3 - y_3 + y_4 \\ -d_5 \cos \theta_5 - l_4 \cos \theta_4 - x_4 + x_5 \\ -d_5 \sin \theta_5 - l_4 \sin \theta_4 - y_4 + y_5 \end{bmatrix}$$

拘束条件 Φ_h の時間微分から拘束行列 C が導出される。 $\Phi_h = \mathbf{0}$ であるからその時間微分も $Cv = \mathbf{0}$ となる。

$$\frac{d}{dt}\Phi_h = \frac{\partial \Phi_h}{\partial \mathbf{q}_a} \cdot \frac{d\mathbf{q}_a}{dt} = \frac{\partial \Phi_h}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a} \cdot \mathbf{A}_a v \quad (3.7)$$

(3.7) より C は次式となる。

$$C = \frac{\partial \Phi_h}{\partial \mathbf{q}_a} \cdot \mathbf{A}_a \quad (3.8)$$

C を用いて拘束後の運動方程式を (3.9) に示す。

$$M\dot{v} = h + C^T \lambda \quad (3.9)$$

(3.9) において λ はラグランジュの未定数である。

PJ 法の手順に従って、 $CD = \mathbf{0}$ かつ $v = D\dot{q}$ を満たす直交補行列 [92] D を導出する。ここで、 \dot{q} は接速度であり、拘束後でも自由に動ける量である。

$$\dot{q} = [\omega_1, w_{11}, w_{12}, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5]^T$$

擬速度 v を接速度 \dot{q} とそれ以外の速度 v_D に分割する。この際、 v_D は \dot{q} に従属な成分である。 v の成分を $[\dot{q}^T, v_D^T]^T$ に並び替える。この v の並び替えに対応して、 C も並び替えると $Cv = \mathbf{0}$ より $C_1\dot{q} + C_2v_D = \mathbf{0}$ を満足するものが存在する。導入する拘束条件が独立かつ冗長でなければ、一般化座標の次元と接速度の次元の関係から、 C_2 は一般に正方かつ正則行列となることに注意する。この C_1, C_2 を結合し、 $C_a = [C_1, C_2]$ とする。ここで、 $v_1 = \dot{q}, v_2 = v_D$ より D_a は次式となる。

$$D_a = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, D_1 := I_{7 \times 7}, D_2 := -C_2^{-1}C_1$$

なお、今回の場合は、 C_1, C_2 のサイズはそれぞれ 8 行 7 列、8 行 8 列となる。

この時, $\frac{d}{dt}(C_a D_a) = \mathbf{0}$ かつ $\dot{D}_1 = \mathbf{0}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(C_a D_a) &= \dot{C}_1 D_1 + \dot{C}_2 D_2 + C_1 \dot{D}_1 + C_2 \dot{D}_2 = 0 \\ \dot{D}_2 &= -C_2^{-1} \dot{C}_a D\end{aligned}$$

より

$$\dot{D}_a := \begin{bmatrix} Z_{7 \times 7} \\ -C_2^{-1} \dot{C}_a D_a \end{bmatrix}$$

となる.

並び替えた C_a を再び, (3.7) の順番に並べ直す. D, \dot{D} も $v = Dq$ が成り立つように並べ直す. 並べ直した D, \dot{D} は D_a, \dot{D}_a を用いると次式となる. ただし $D_a(i), \dot{D}_a(i)$ は D_a, \dot{D}_a の i 行目の成分を示す.

$$\begin{aligned}D &= [D_a(1), D_a(2), D_a(3), D_a(4), D_a(7), \\ &\quad D_a(10), D_a(13), D_a(5), D_a(8), D_a(9), \\ &\quad D_a(6), D_a(11), D_a(12), D_a(14), D_a(15)]^T, \\ \dot{D} &= [\dot{D}_a(1), \dot{D}_a(2), \dot{D}_a(3), \dot{D}_a(4), \dot{D}_a(7), \\ &\quad \dot{D}_a(10), \dot{D}_a(13), \dot{D}_a(5), \dot{D}_a(8), \dot{D}_a(9), \\ &\quad \dot{D}_a(6), \dot{D}_a(11), \dot{D}_a(12), \dot{D}_a(14), \dot{D}_a(15)]^T\end{aligned}$$

3.1.3 拘束後の運動方程式の導出

導出した直交補行列 D を用いて, 拘束後の運動方程式を導出する. $CD = \mathbf{0}$ であるから, (3.9) に D^T を左から掛けることで λ を消去する.

$$\begin{aligned}D^T M \dot{v} &= D^T h + D^T C^T \lambda \\ D^T M \dot{v} &= D^T h\end{aligned}\tag{3.10}$$

(3.10) は無拘束時の擬速度で表現されている. これを座標変換し, 拘束後の接速度 \dot{q} を用いて表すことで, 拘束後の自由度のみで記述する. ここで, $v = D\dot{q}$ を微分すると

$$\dot{v} = D\ddot{q} + \dot{D}\dot{q}\tag{3.11}$$

(3.11) を (3.10) に代入した拘束後の運動方程式を次式に示す.

$$\begin{aligned}D^T M(D\ddot{q} + \dot{D}\dot{q}) &= D^T h \\ D^T M D \ddot{q} + D^T M \dot{D} \dot{q} &= D^T h\end{aligned}\tag{3.12}$$

(3.12) が最終的に得られる運動方程式となる.

3.2 オブザーバの構築

本節で用いる蛇型ロボットでは、各リンクの重心位置速度、角速度が直接観測できない。そこで、これらの状態を推定するためのオブザーバを構築する。本節で構築するオブザーバは Nanasai ら [89] のものをベースとする。

3.2.1 オブザーバの設計

本節では、SDRE の利用を念頭におき、オブザーバを構築するための SDC 形を導出する。本節の実機システムでは、先頭リンクの重心位置 (x_1, y_1) 及び角度 (θ_1) と各リンク間の相対角度 $\phi_k (k = 2 \sim 5)$ がセンサにより観測できる。

(3.12) から SDC 形を導出するために、一般化力 \mathbf{h} の偏微分を用いて接速度に関する項と入力トルクに関する項に分解する。一般化力を分解する際、 \mathbf{h} に含まれるクーロン摩擦は切り替え点を除いて定数項として振る舞うため、微分すると影響が残らない。そこで、クーロン摩擦の影響を状態空間表現に含めるために (3.6) の \mathbf{h}_f の i リンク目に発生するクーロン摩擦に w_{i2}/w_{i2} をかける。 (3.6) の \mathbf{h}_f を \mathbf{h}_{fa} に差し替えて、一般化力 \mathbf{h} を再定義し、これを偏微分することで接速度に関する項と入力トルクに関する項に分解する。

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_b + \mathbf{h}_{fa}$$

$$\mathbf{h}_{fa} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu_1 m_1 g w_{12}}{w_{12}} \cdot \text{sgn}(w_{12}) - c_{12}(w_{12} + r_1(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu_2 m_2 g w_{22}}{w_{22}} \cdot \text{sgn}(w_{22}) - c_{22}(w_{22} + r_2(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu_3 m_3 g w_{32}}{w_{32}} \cdot \text{sgn}(w_{32}) - c_{32}(w_{32} + r_3(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3)) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu_4 m_4 g w_{42}}{w_{42}} \cdot \text{sgn}(w_{42}) - c_{42}(w_{42} + r_4(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_4)) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu_5 m_5 g w_{52}}{w_{52}} \cdot \text{sgn}(w_{52}) - c_{52}(w_{52} + r_5(-\dot{\theta}_5)) \end{pmatrix}$$

一般化力 \mathbf{h} の分解結果は以下となる．

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{E} &:= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{F} := \frac{\partial (\mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{u})}{\partial \mathbf{v}}, \quad \mathbf{u} := [\tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5]^T\end{aligned}$$

(3.12) で表される蛇型ロボットの運動方程式は一般化座標 \mathbf{q} で記述されているが，この一般化座標 \mathbf{q} は実際のロボットではセンサから直接計測できない場合が多い．そこで，ロボット実機で観測できる物理量を状態量に含めておいた方が実用上の観点では便利である．そこで SDRE ベースのオブザーバを構築する時に，このような状態量を含む SDC 形へと変形することにする．観測量 \mathbf{y} を次のように定義する．ただし $\phi_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, ($i = 2 \sim 5$) である．

$$\mathbf{y} = [\theta_1, x_1, y_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5]^T \quad (3.13)$$

SDC 形を求めるために $\dot{\mathbf{y}}$ を計算する必要がある．そこで， $\mathbf{v} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_a\mathbf{v}$, (3.1) の関係を利用して，観測値 \mathbf{y} と接速度 $\dot{\mathbf{q}}$ の関係を示す \mathbf{H}_y を求める．

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &:= \mathbf{H}_y\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{H}_y &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ D(4) - D(1) \\ D(7) - D(4) & \mathbf{0}_{7 \times 4} \\ D(10) - D(7) \\ D(13) - D(10) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{y}}$ を出力推定値として，オブザーバの状態量を $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{y}}^T, \dot{\hat{\mathbf{q}}}^T]^T$ とする．この時，オブザーバーの SDC 形は次で与えられる．

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_o(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_o(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{u} + \mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \quad (3.14)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}_o\hat{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_o(\hat{\mathbf{x}}) &:= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{7 \times 7} & \mathbf{H}_y \\ \mathbf{Z}_{7 \times 7} & \tilde{\mathbf{M}}_o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_o(\hat{\mathbf{x}}) := \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{7 \times 4} \\ \tilde{\mathbf{N}}_o \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_o &:= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{7 \times 7} & \mathbf{Z}_{7 \times 7} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ただし (3.14) の $\tilde{\mathbf{M}}_o$, $\tilde{\mathbf{N}}_o$ は以下となる．

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}_o &:= (\mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{D}^T \mathbf{F} \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{D}}) \\ \tilde{\mathbf{N}}_o &:= (\mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{D}^T \mathbf{E})\end{aligned} \quad (3.15)$$

(3.14) のオブザーバゲイン $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}})$ を SDRE によって決定する．

3.2.2 SDRE に基づいたオブザーバの構築

SDRE に基づく制御系設計 [88, 91] では、本来 (3.14) のように係数行列が状態量に依存している SDC 形システムに対して、各時刻において状態を固定（原文では'Frozen'）することで、係数行列を定数行列とみなし、これを用いた Riccati 方程式を解くことでフィードバックゲインを算出する。この操作を時刻ごとに繰り返していく。この手順を全次元オブザーバの設計に適用する [98]。

双対システム

$$\dot{\epsilon}_e = \mathbf{A}_o^T \epsilon_e + \mathbf{C}_o^T \eta_e \quad (3.16)$$

に対して、

$$\bar{J} = \int_0^\infty (\epsilon_e^T \mathbf{Q}_o \epsilon_e + \eta^T \mathbf{R}_o \eta) dt \quad (3.17)$$

の二次形式評価関数の重み行列 $\mathbf{Q}_o \geq 0, \mathbf{R}_o > 0$ を用いて、次の SDRE を解く。

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_o(\hat{x})\mathbf{P}(\hat{x}) + \mathbf{P}(\hat{x})\mathbf{A}_o(\hat{x})^T + \mathbf{Q}_o(\hat{x}) \\ & - \mathbf{P}(\hat{x})\mathbf{C}_o^T \mathbf{R}_o(\hat{x})^{-1} \mathbf{C}_o^T \mathbf{P}(\hat{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.18)$$

このとき、オブザーバゲイン \mathbf{L}^T は、

$$\mathbf{L}(\hat{x})^T = -\mathbf{R}_o(\hat{x})\mathbf{C}_o\mathbf{P}_o(\hat{x}) \quad (3.19)$$

のように求められる [88]。ただし、 \mathbf{P}_o は、(3.19) に示す SDRE の正定対称解である。このオブザーバゲイン \mathbf{L} を制御周期毎に (3.18), (3.19) を解きなおすことで、オブザーバゲインを更新する。

3.3 制御系設計

本節では、蛇型ロボットが横滑りを抑制しながら、目標位置まで推進する先頭位置制御系を設計する。この目標位置制御は State Dependent Riccati Equation (SDRE) を基に設計する。本節ではフィードバックゲインを計算する際に、最適レギュレータを用いて計算する。計算時に接速度としてリンクの法線方向速度を含めた状態空間表現を使用する。この状態空間表現を用いた評価関数を設計し、 i リンクが横滑りした際に対応するリンクの法線方向の速度 w_{i2} に関する重みを増大させることで横滑りを抑制する。しかし、3.1 節におけるモデリングでは、接速度に法線方向速度を含めていない。そこで、座標変換を用いて接速度に法線方向速度を含めた状態空間表現を導出する。状態にリンクの法線方向の成分をとった場合の状態 \mathbf{z}_a を次式に示す。

$$\mathbf{z}_a = [\omega_1, w_{11}, w_{12}, w_{22}, w_{32}, w_{42}, w_{52}]^T \quad (3.20)$$

(3.20) の \mathbf{x} と \mathbf{z}_a の関係を示す座標変換行列 \mathbf{T} を次式に示す。

$$\mathbf{z}_a = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

T を用いて座標変換後の状態空間表現を示す.

$$\begin{aligned}\dot{z}_a &= TA_T T^{-1} z_a + TB_T u \\ A_T &:= \tilde{M}_o \\ B_T &:= \tilde{N}_o\end{aligned}$$

次に先頭位置を含んだ状態空間表現を導出する. これにより先頭位置を目標位置に移動させることができる. また, 蛇の先頭位置を x_h, y_h とおくと蛇の先頭位置は次式で表せる.

$$\begin{aligned}x_h &= x_1 - d_1 \cos \theta_1 \\ y_h &= y_1 - d_1 \sin \theta_1\end{aligned}\tag{3.21}$$

接速度 \dot{q} を用いて \dot{x}_h, \dot{y}_h を表す.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_h \\ \dot{y}_h \end{bmatrix} &= S \dot{q} \\ S &:= \begin{bmatrix} d_1 \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & -\sin \theta & \mathbf{Z}_{1 \times 4} \\ -d_1 \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & \cos \theta & \mathbf{Z}_{1 \times 4} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

状態 z_a に先頭位置を含めた状態空間表現を導出する. 拡大したシステムの状態を z とするとする.

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bu \\ z &:= [x_h, y_h, z_a] \\ A &:= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{2 \times 2} & S \\ \mathbf{Z}_{7 \times 2} & TA_T T^{-1} \end{bmatrix} \\ B &:= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{2 \times 1} \\ TB_T \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.22}$$

(3.22) を基に横滑りを抑制し, 先頭位置を原点に収束させる制御系を設計する. 本節では (3.23) に示す評価関数を考える.

$$J = \int_0^\infty (z^T Q(z) z + u^T R u) dx\tag{3.23}$$

(3.23) の $Q(z), R$ は状態依存型重み行列であり, すべての状態 z に対してそれぞれ半正定, 正定に選ぶ. この評価関数を最小にするフィードバックゲイン $F(z)$ は.

$$F(z) := R(z)^{-1} B(z)^T P(z)\tag{3.24}$$

ただし, $P(z)$ は次式に示すリカッチ方程式の正定対称解である.

$$\begin{aligned}A(z)^T P(z) + P(z) A(z) + Q(z) \\ - P(z) B(z) R^{-1} B(z)^T P(z) = 0\end{aligned}\tag{3.25}$$

制御周期毎に (3.24), (3.25) を解き, このフィードバックゲイン $F(z)$ を計算しなおすことで入力を更新する.

3.4 推進シミュレーション

3.2 節で構築したオブザーバと 3.3 節で設計した制御系を用いて, 蛇型ロボットが横滑りを抑制しながら, 目標位置まで推進できるかシミュレーションを通じて確認する. シミュレーションでは以下 2 点の目的が達成可能か検証する.

- 蛇型ロボットが横滑りを抑制しながら, 先頭位置を原点に収束できること
- オブザーバによって, 蛇型ロボットの法線方向の速度が推定できること

シミュレーション条件を Table 3.3, 物理パラメータを Table 3.4 にまとめる. シミュレーションに使用するソフトは MaTX[99, 100], 常微分方程式を解くアルゴリズムは ode45Hybrid を使用する.

$$Q = \text{diag}(10.0, 10.0, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1) \quad (3.26)$$

Table 3.3 Simulation Condition		
条件	値	単位
シミュレーション時間	160.0	s
サンプリング時間	0.01	s
刻み時間	0.001	s
スタート位置 (x_h, y_h)	(0.5, 0.5)	m
目標位置 (x_p, y_p)	(0.0, 0.0)	m
初期 θ_i	$\pi/4, \pi/2, 3\pi/10$	rad
	$\pi 55/100, 4\pi/10$	rad

3.4.1 推進制御の検証

提案する制御系によって摩擦係数の低い路面においても, 横滑りを抑制しながら蛇の先頭位置を原点に収束することが可能かシミュレーションを通して検証する. そこで, 本節では従来手法と提案手法のシミュレーション結果を比較することで, 提案手法の有効性を検証する. いずれも路面とロボットの間に働く摩擦の摩擦係数は小さく横滑りが発生しやすい状況にている.

- 従来手法: 制御系において SDRE を解く際に, 横滑りしない拘束を有する蛇型ロボットのモデルを用いる [95]

Table 3.4 Physical parameters used in simulation

パラメータ	値	単位
J_i	0.0108	kg.m ²
m_i	1.2	kg
c_i	0.016	Nm.s/rad
c_{i2}	3.00	Nm.s
μ_i	0.010	-
d_i	0.15	m
l_i	0.10	m
r_i	0.03	m

- 提案手法：制御系において SDRE を解く際に，3.1 節に示した横滑りを考慮した蛇型ロボットのモデルを用いる

SDRE を解く際に用いる状態依存重み行列は，従来手法では (3.27)，提案手法では (3.28) とする．

$$\mathbf{Q}_1 = \text{diag}(100, 100, 0.1, 0.1) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{R}_1 = \text{diag}(1.0, 1.0, 1.0, 1.0)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \text{diag}(\sigma_h, \sigma_h, 0.1, 0.1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \quad (3.28)$$

$$\mathbf{R}_2 = \text{diag}(1.0, 1.0, 1.0, 1.0)$$

$$\sigma_h = \begin{cases} 1000 - 1000 \cdot |v_{yi}| & (v_{yi} \leq 0.9999) \\ 0.1 & (v_{yi} > 0.9999) \end{cases}$$

$$\sigma_i = \begin{cases} 10.0 \cdot v_{yi} & (v_{yi} \leq 1.0 \times 10^{-3}) \\ 0.1 & (v_{yi} < 1.0 \times 10^{-3}) \end{cases}$$

(3.27) は左から順に $x_h, y_h, \omega_1, w_{11}$ に関する重みを表す．(3.28) において， σ_h は蛇型ロボットの先頭位置 (x_h, y_h) に関する重み， σ_i ($i = 1, \dots, 5$) は各リンクの法線方向の速度 w_{i2} に関する重みである．以上の重みを用いて (3.24), (3.25) を制御周期ごとに解き直し，フィードバックゲイン $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ を計算して，制御入力を決する．

従来法：横滑りしない拘束付きモデルを用いた場合

先頭位置の軌跡及び法線方向速度を Figure 3.2～Figure 3.7 に示す．Figure 3.2 より，横滑りがないモデルに基づく従来法の制御器を用いると，全体的にはロボットの先頭位置がスタート位置 $(x_p, y_p) = (0.5, 0.5)$ から原点 $(0.0, 0.0)$ m に向かって推進した．しかし，Figure 3.2 の黒い四角で囲

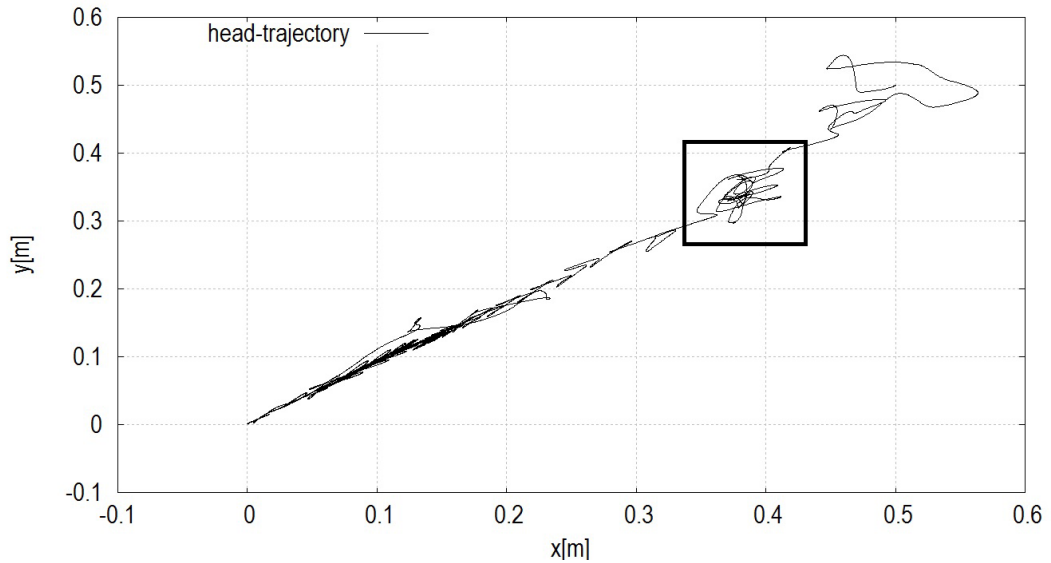


Figure 3.2 Trajectory of head position (using conventional study)

んだ (0.4, 0.3)m 付近では、ある一定時間、先頭位置が原点に向かって推進せず留まっていた。この原因は制御器が生成した入力では、リンクの推進方向に対する横方向の摩擦が十分に確保できなかったからである。その結果、横滑りが発生し、蛇型ロボットが立ち往生している。また Figure 3.3~Figure 3.7 より、全てのリンクの法線方向の速度が振動的であることが分かる。これは、制御器が横滑りを考慮しないため、横滑りが生じた時に入力の正転、反転を繰り返すごとになり、入力の方向に応じて法線方向の速度・方向が変化することで振動が発生していると考えられる。このところから横滑りを考慮する必要性が改めて確認できる。

提案法：横滑りを考慮したモデルを用いた場合

先頭位置の軌跡及び法線方向の速度を Figure 3.8~Figure 3.13 に示す。Figure 3.2 より蛇型ロボットの先頭位置がスタート位置 $(x_p, y_p) = (0.5, 0.5)$ から目標位置 $(0, 0, 0.0)$ へとスムーズに収束していることが分かる。

また Figure 3.9~Figure 3.13 と Figure 3.3~Figure 3.7 の比較から、提案法により設計した制御器では、横滑りを考慮したモデルを用いて制御入力を計算しているため、法線方向速度の振動を抑制できていることが分かる。つまり、横滑りを推進可能な程度に抑制していることが分かる。これより、横滑りを考慮したモデルを導出し、このモデルを用いた SDRE 制御により、横滑りを抑制しつつ推進が可能となり、摩擦係数の低い路面においても目標位置に到達できることが確認できた。

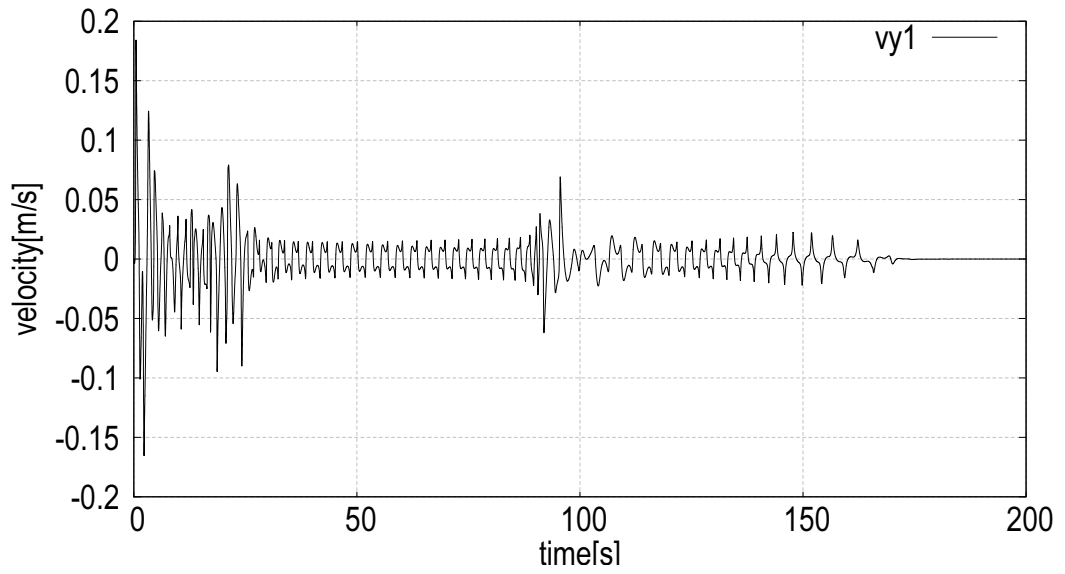


Figure 3.3 Normal velocity in first link(using conventional study)

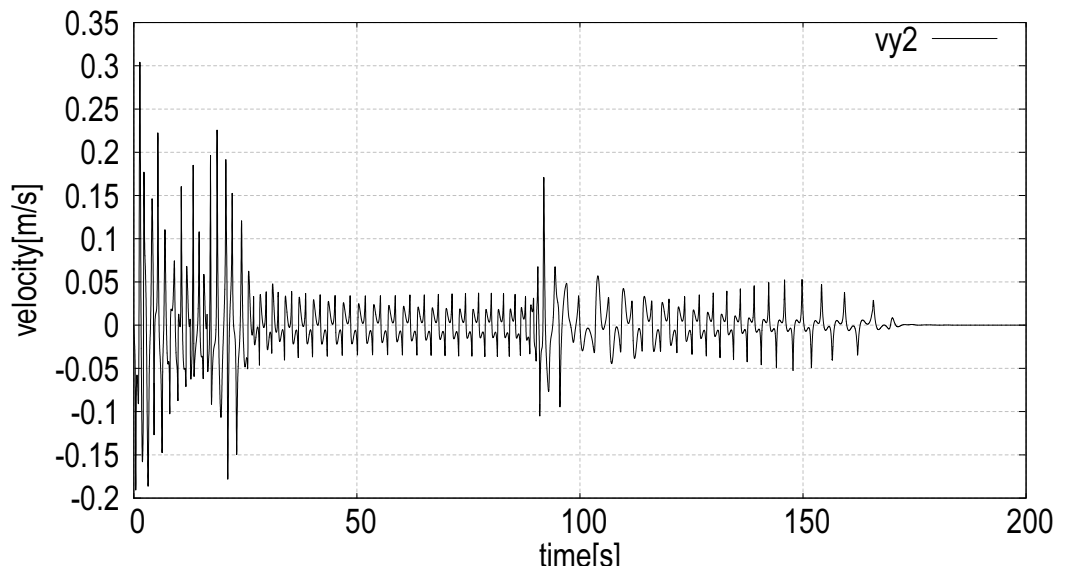


Figure 3.4 Normal velocity in second link(using conventional study)

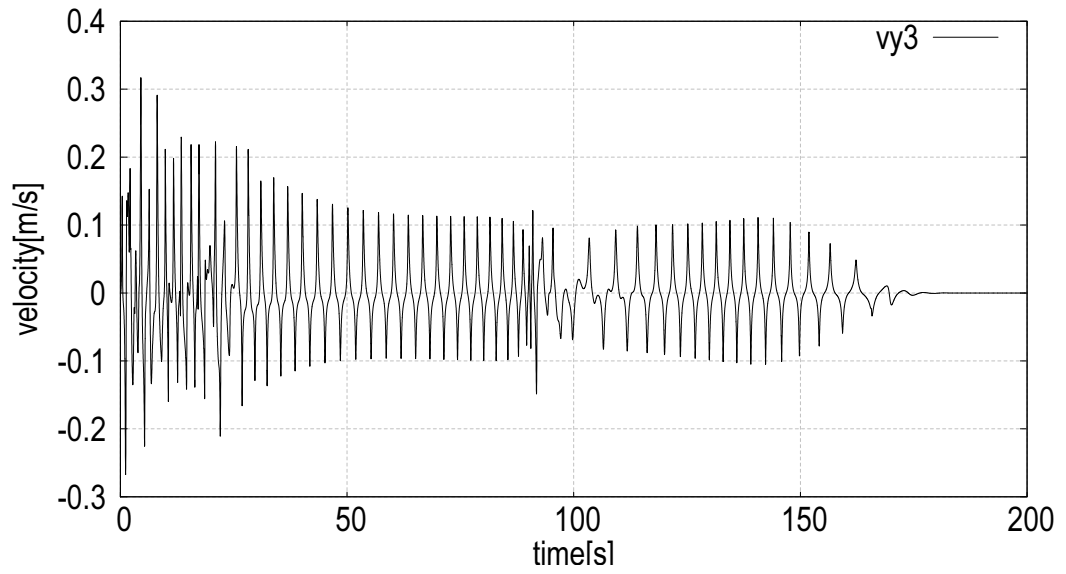


Figure 3.5 Normal velocity in third link(using conventional study)

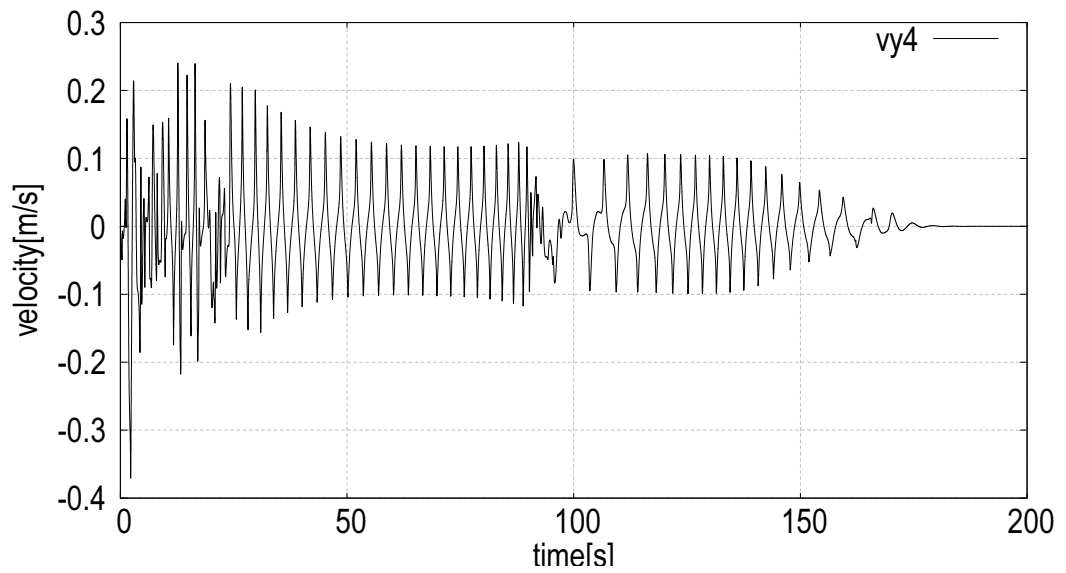


Figure 3.6 Normal velocity in fourth link(using conventional study)

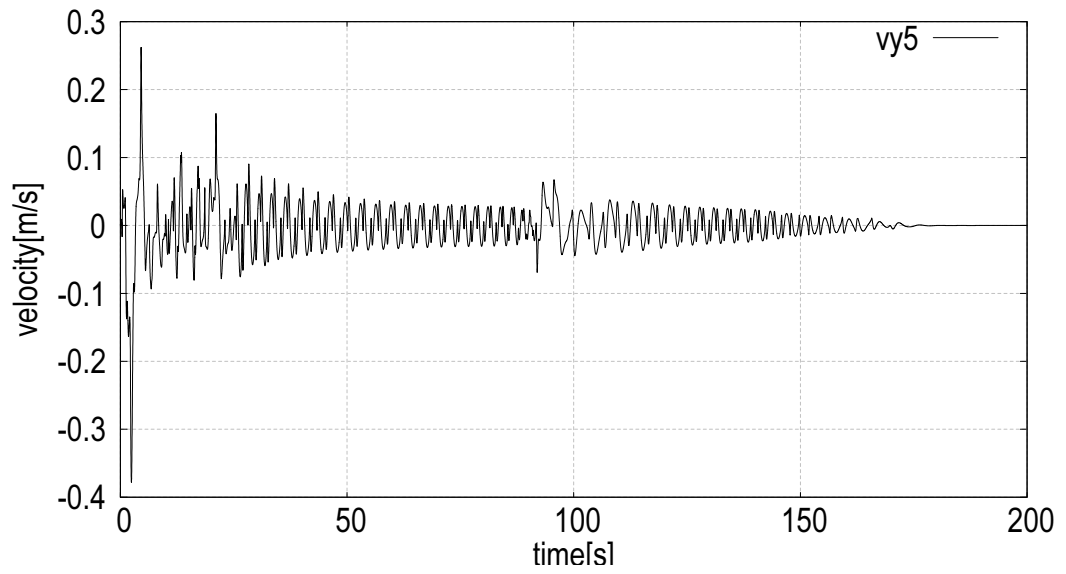


Figure 3.7 Normal velocity in fifth link(using conventional study)

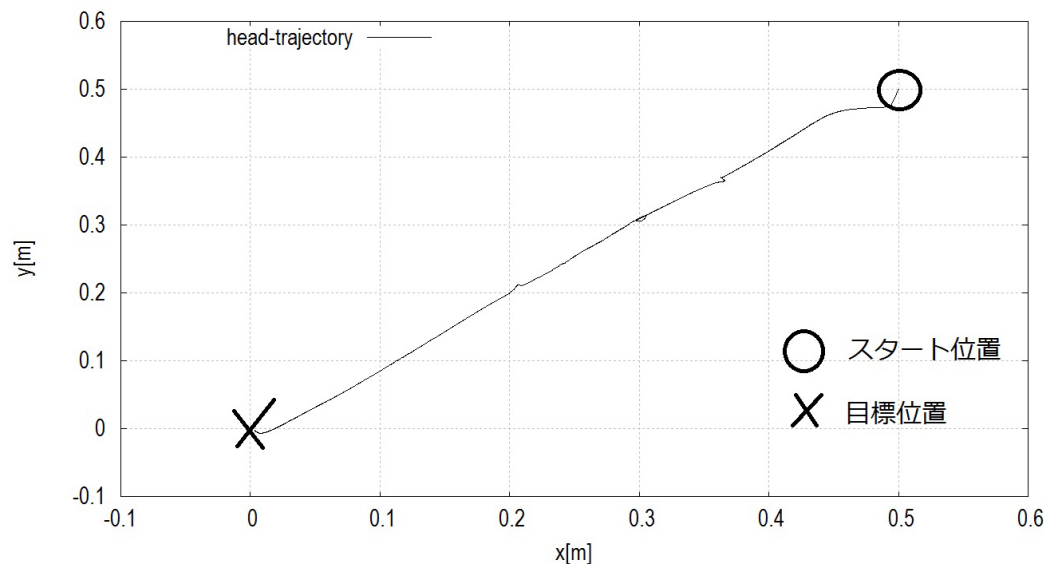


Figure 3.8 Head trajectory of head position (using proposed study)

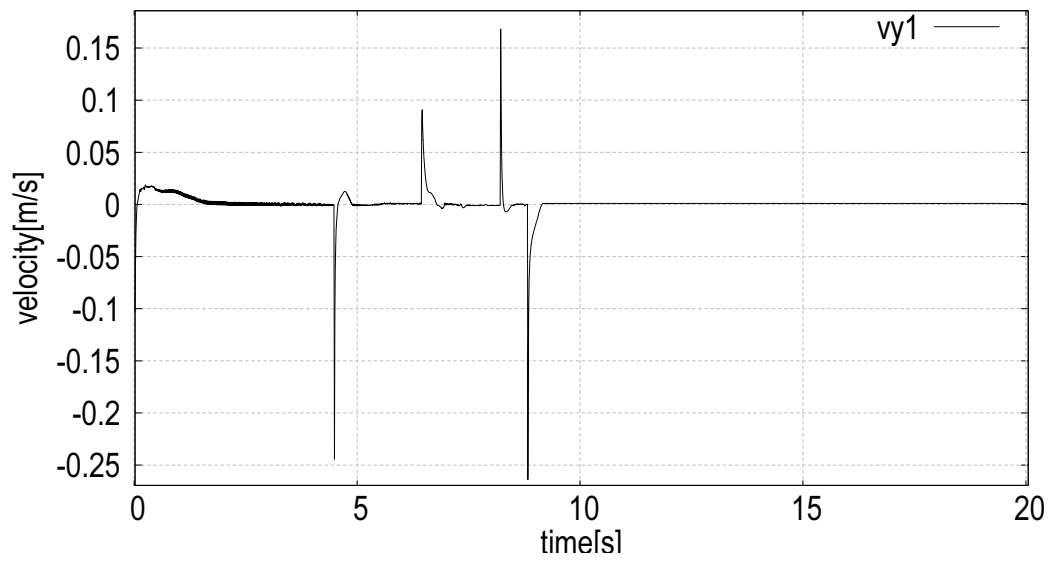


Figure 3.9 Normal velocity in first link(using proposed study)

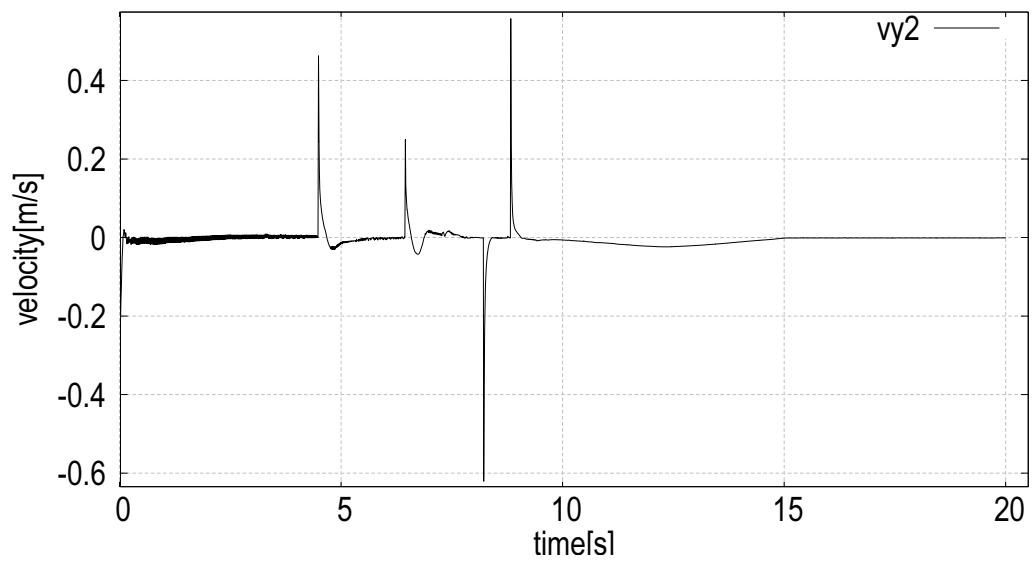


Figure 3.10 Normal velocity in second link(using proposed study)

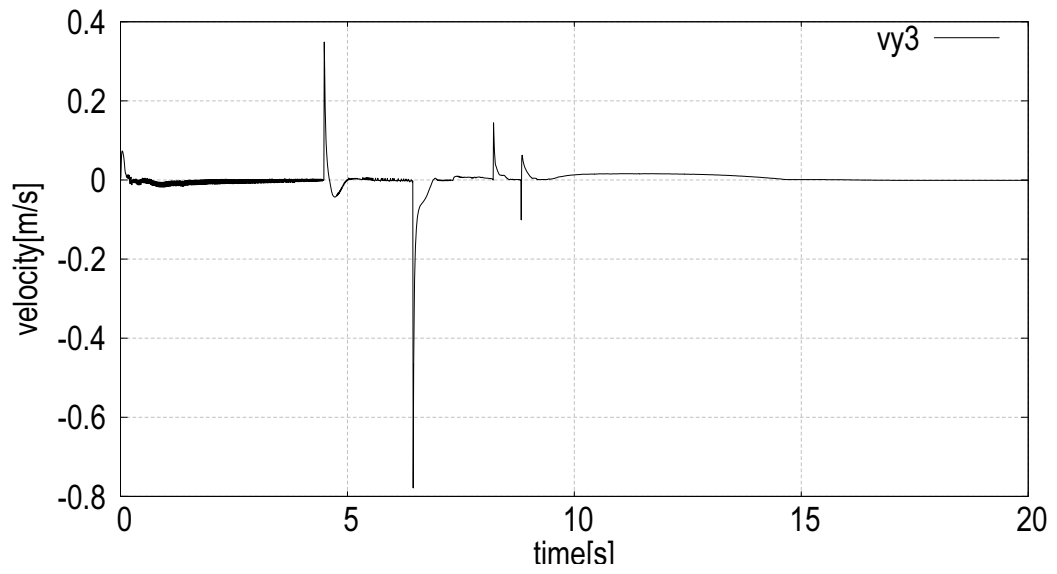


Figure 3.11 Normal velocity in third link(using proposed study)

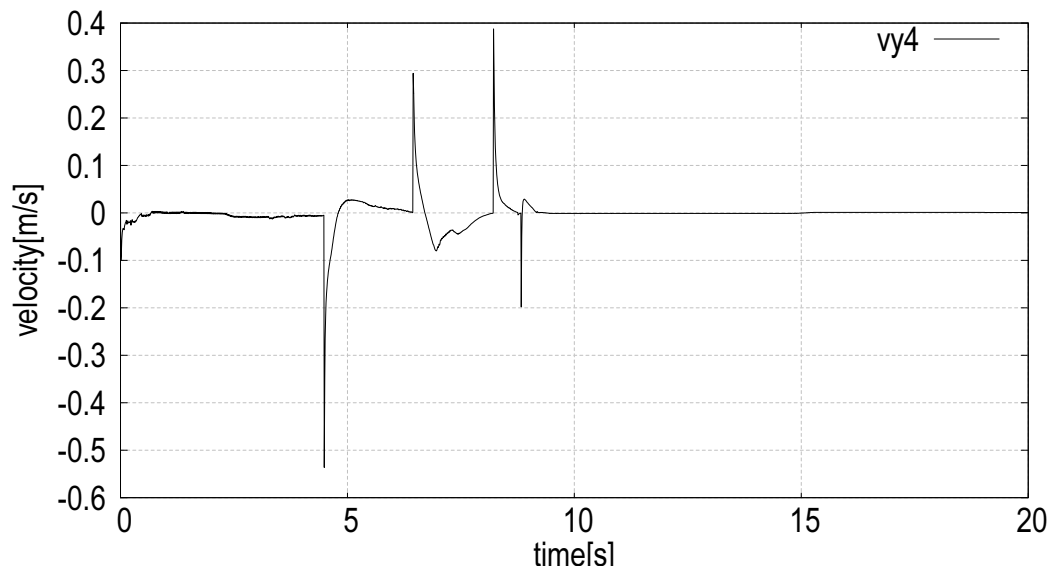


Figure 3.12 Normal velocity in fourth link(using proposed study)

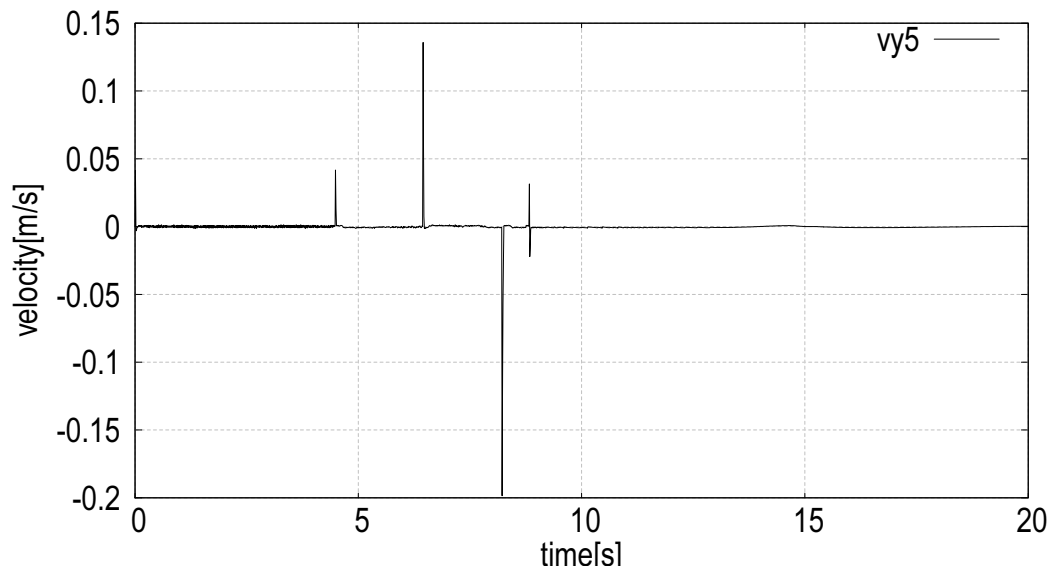


Figure 3.13 Normal velocity in fifth link(using proposed study)

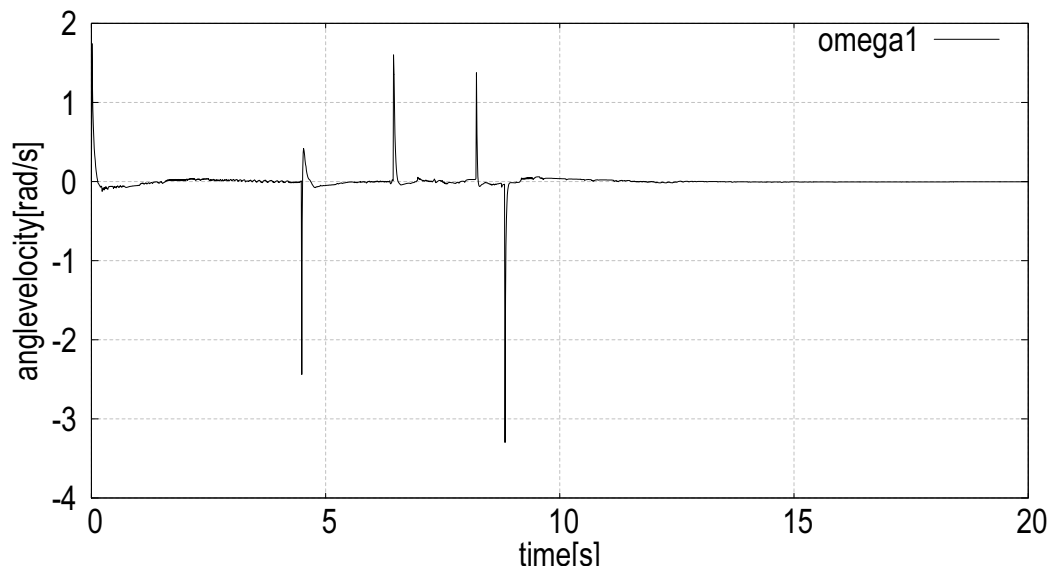


Figure 3.14 True value of angle velocity in first link

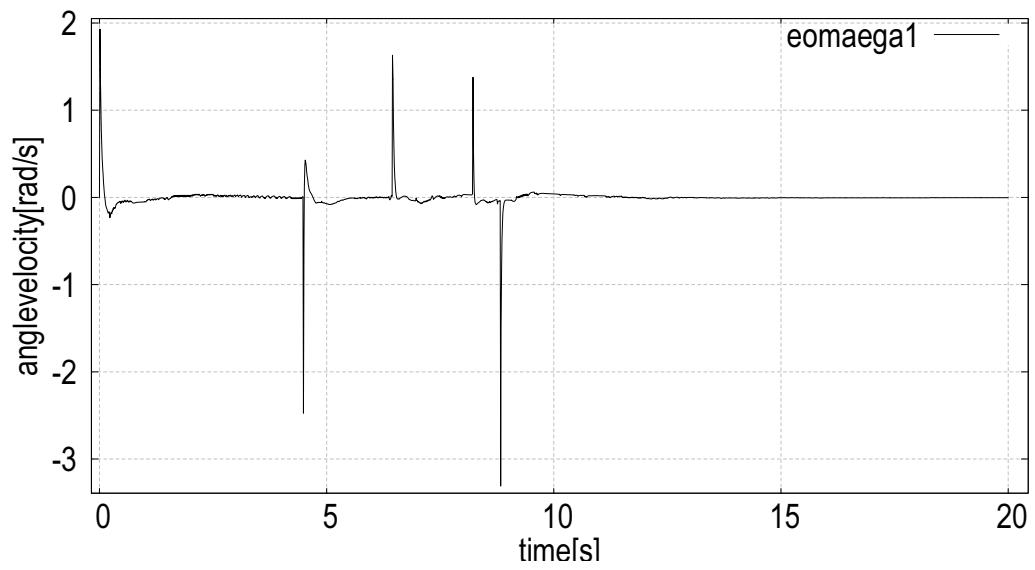


Figure 3.15 Estimation value of angle velocity in first link

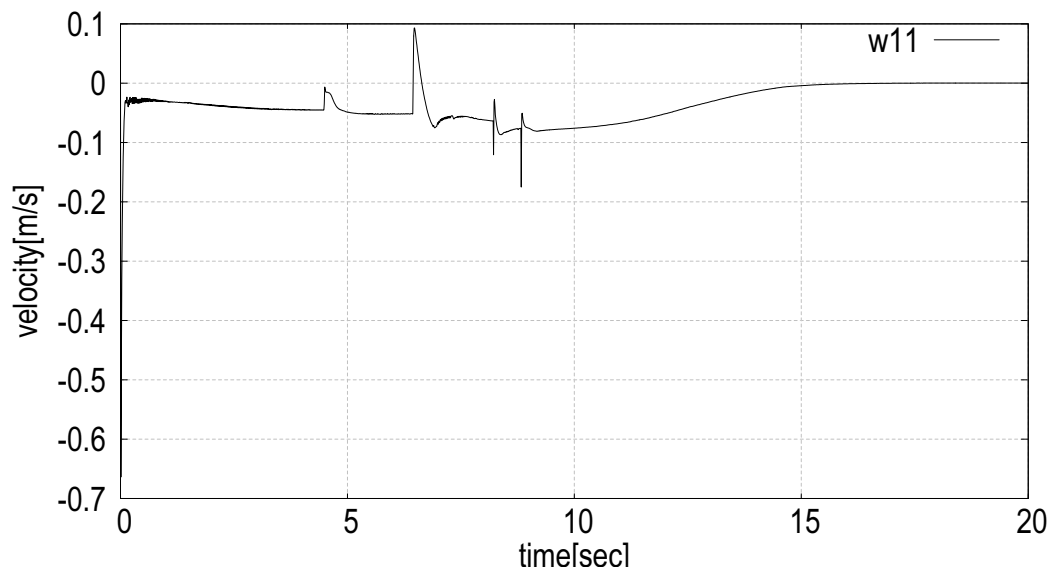


Figure 3.16 True value of propulsive velocity in first link

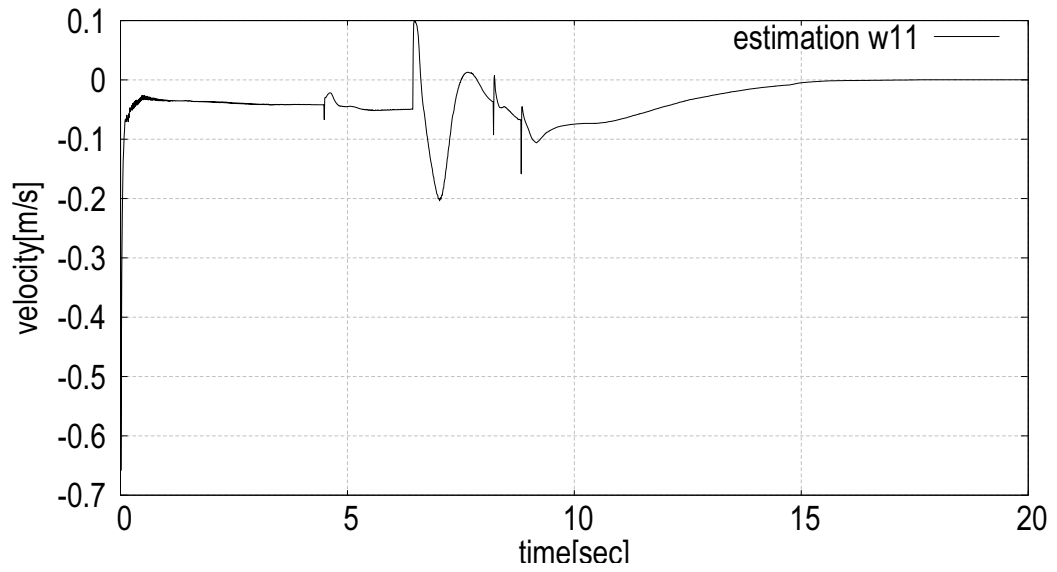


Figure 3.17 Estimation value of propulsive velocity in first link

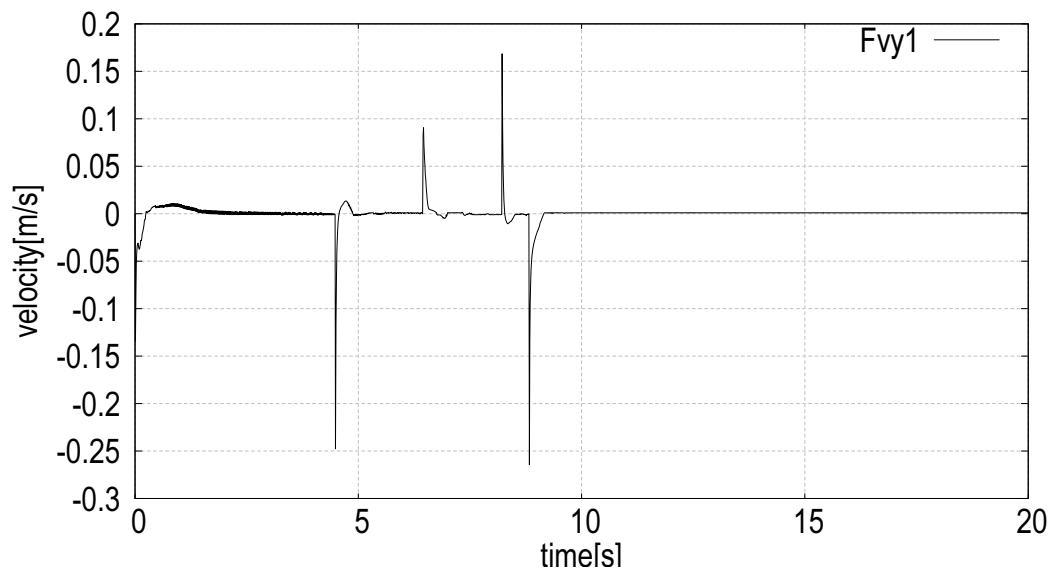


Figure 3.18 Estimation value of normal velocity in first link

3.4.2 オブザーバの検証

推進制御入力の決定に必要な接速度及び法線方向の速度を，提案するオブザーバによって推定できるかシミュレーションを通じて検証する．本節では Q_o に (3.28) と同じものを使用する．本シミュレーションでは，プラントの接速度（真値とする）とオブザーバによる推定値を比較する．各リンクの接速度である角速度，推進速度についての真値と推定値，推定誤差を示す．同時に，推進方向に対する法線方向速度の真値と推定値，推定誤差も調査する．これらのグラフを Figure 3.14～Figure 3.29 に示す．

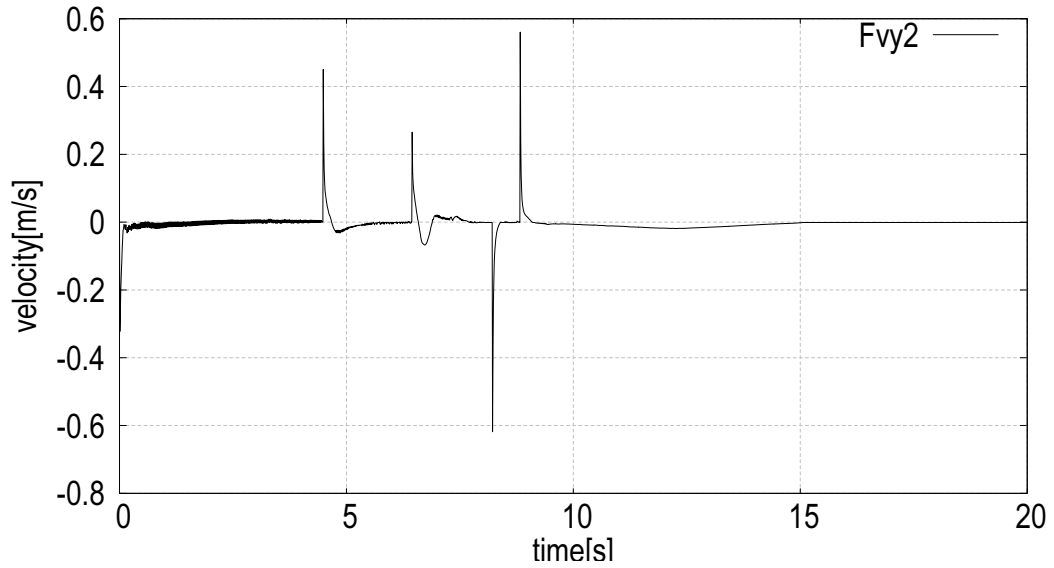


Figure 3.19 Estimation value of normal velocity in second link

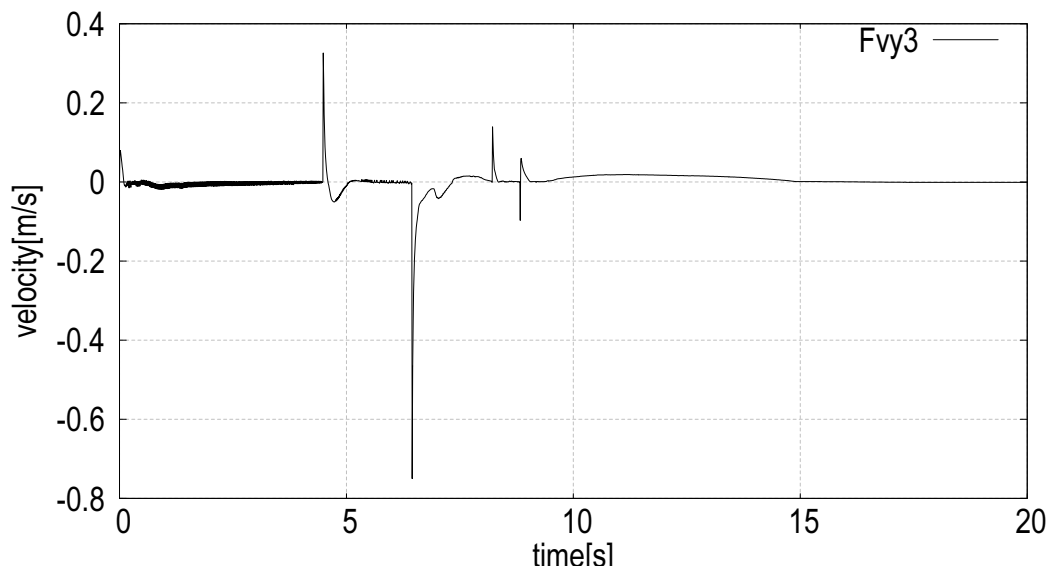


Figure 3.20 Estimation value of normal velocity in third link

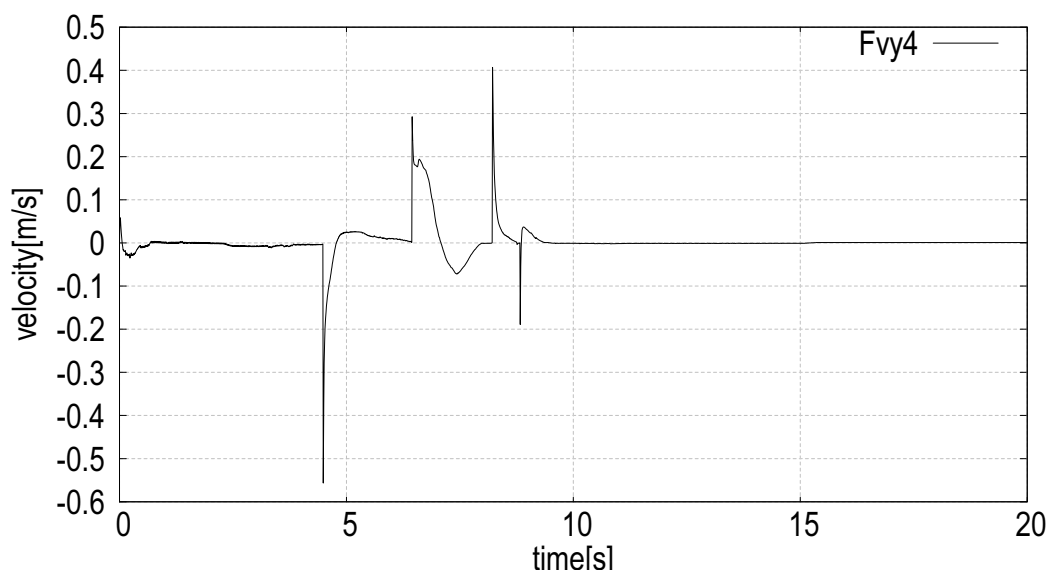


Figure 3.21 Estimation value of normal velocity in fourth link

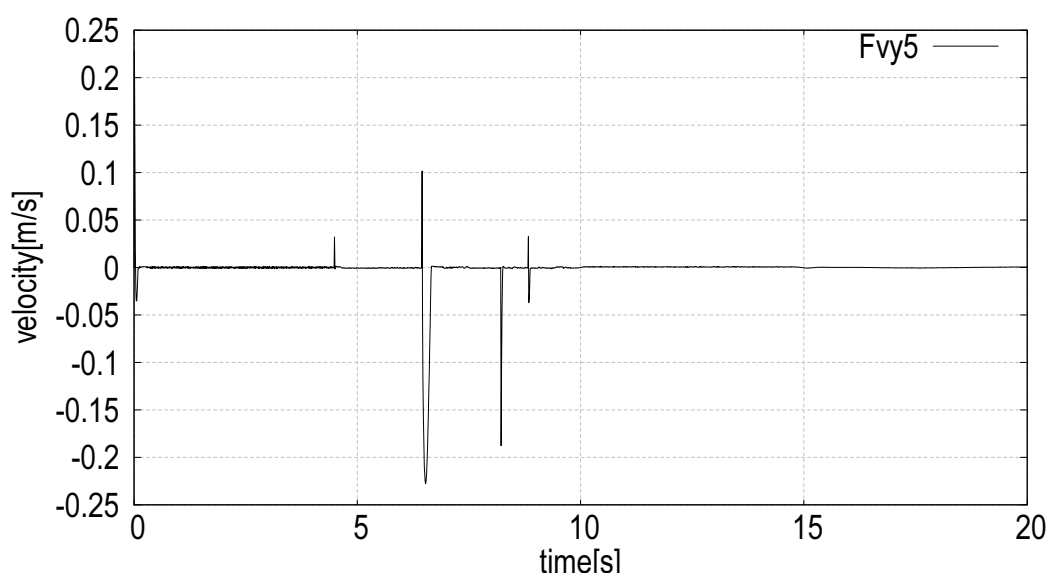


Figure 3.22 Estimation value of normal velocity in fifth link

各リンクの角速度，法線方向速度に関して多少推定誤差が発生している箇所があるが，全体的に誤差は収束しており，推定値が真値に収束しているとみなすことができる．このことからオブザーバによる状態推定性能を確認することができた．

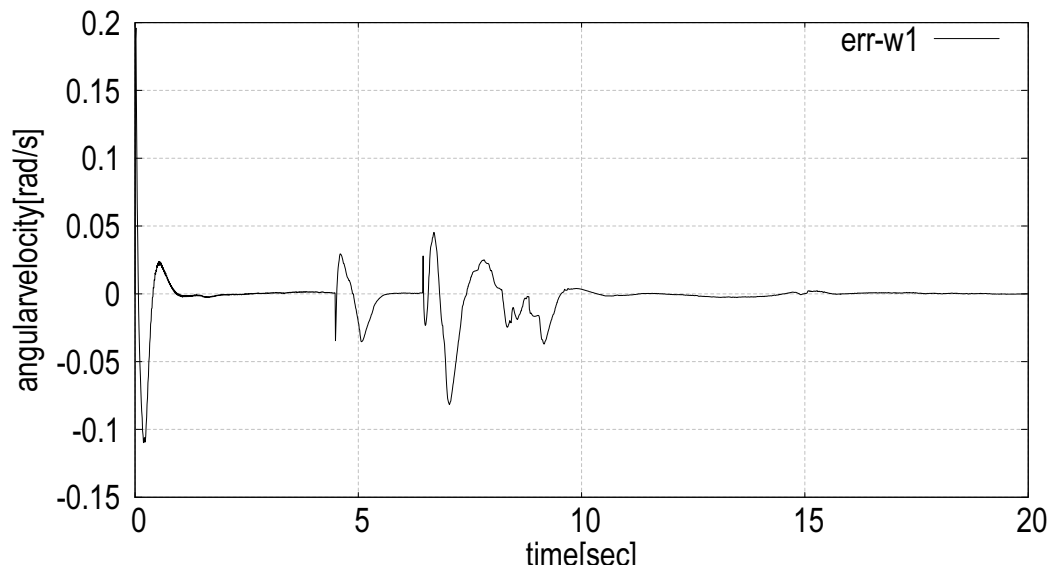


Figure 3.23 Estimation error of angle velocity in first link

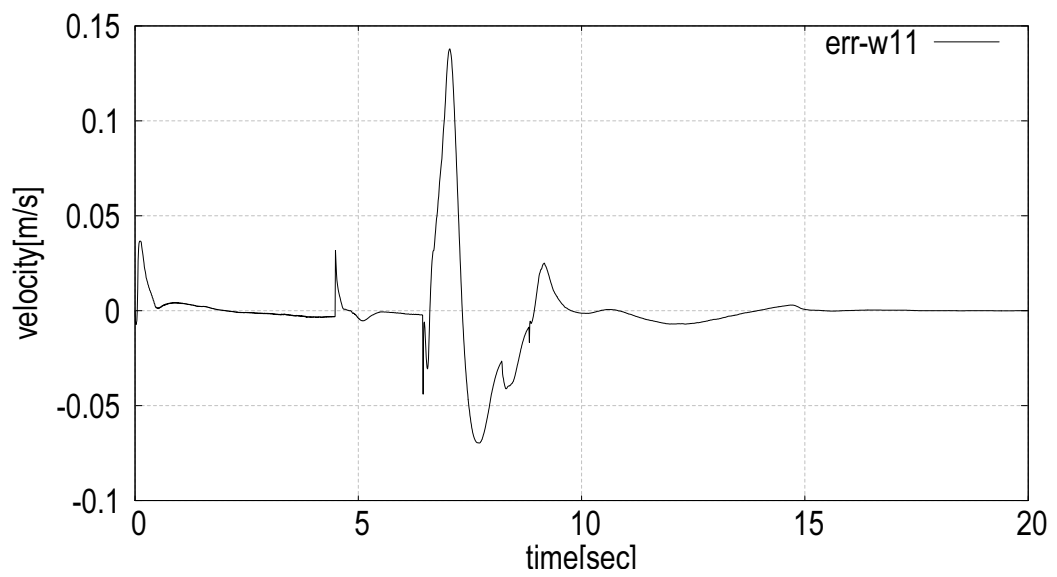


Figure 3.24 Estimation error of propulsive velocity in first link

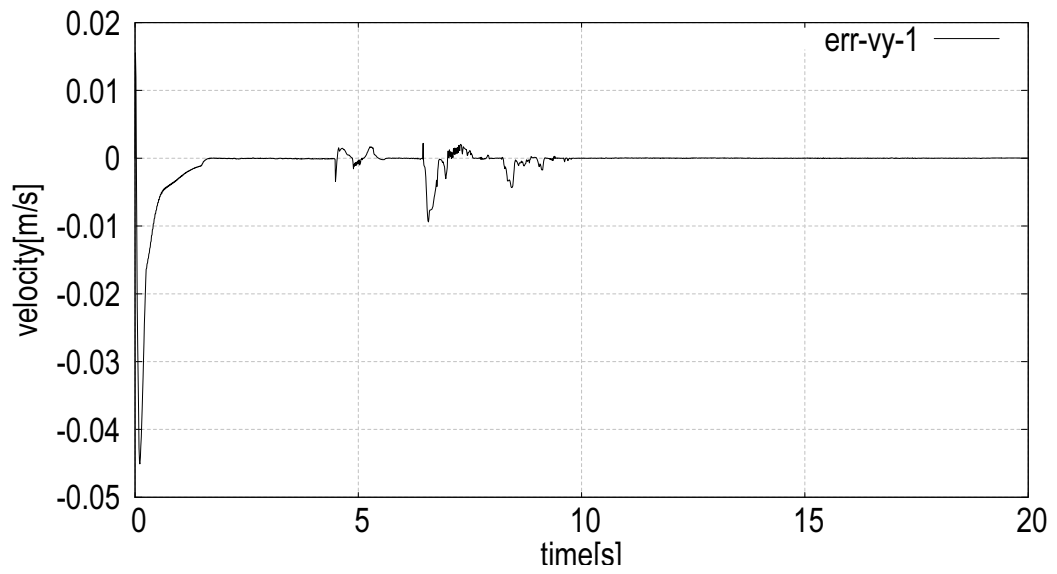


Figure 3.25 Estimation error of velocity in normal direction in first link

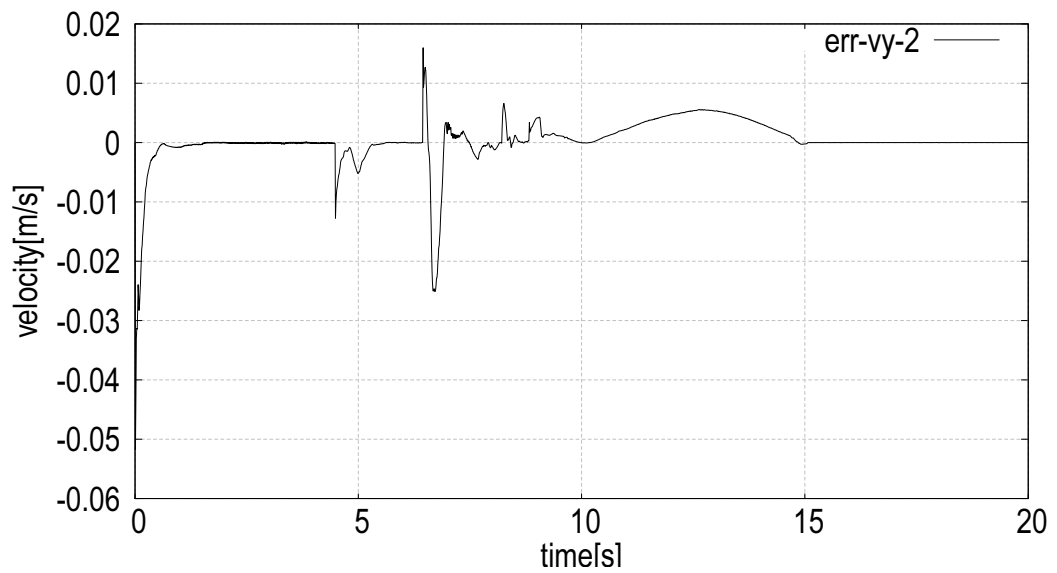


Figure 3.26 Estimation error of velocity in normal direction in second link

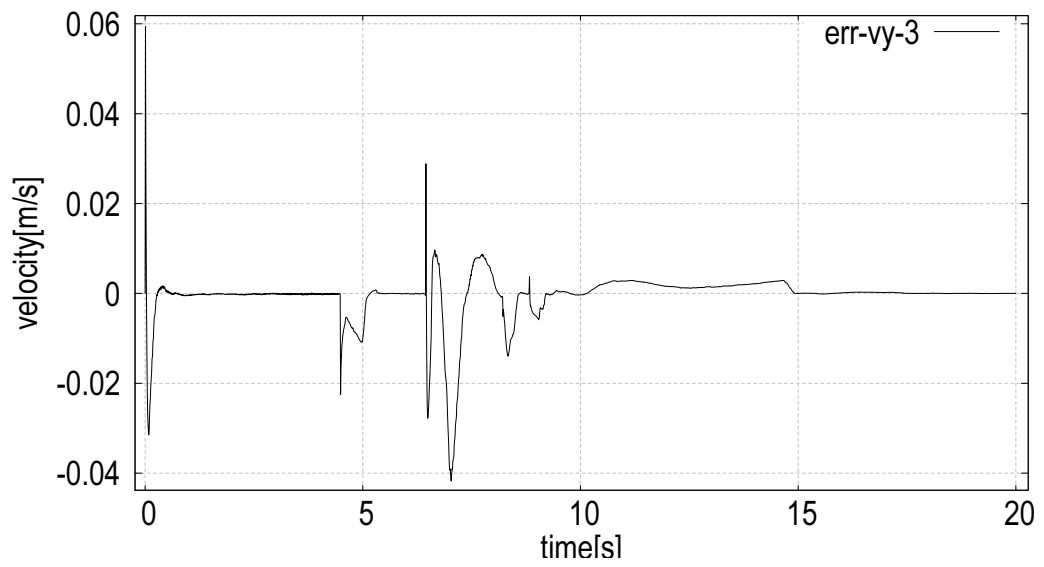


Figure 3.27 Estimation error of velocity in normal direction in third link

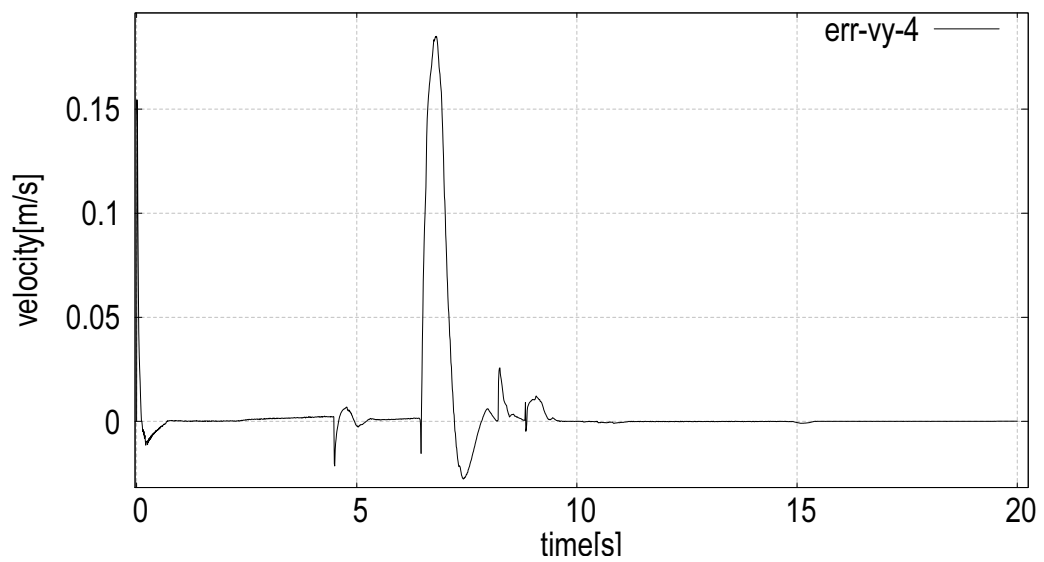


Figure 3.28 Estimation error of velocity in normal direction in fourth link

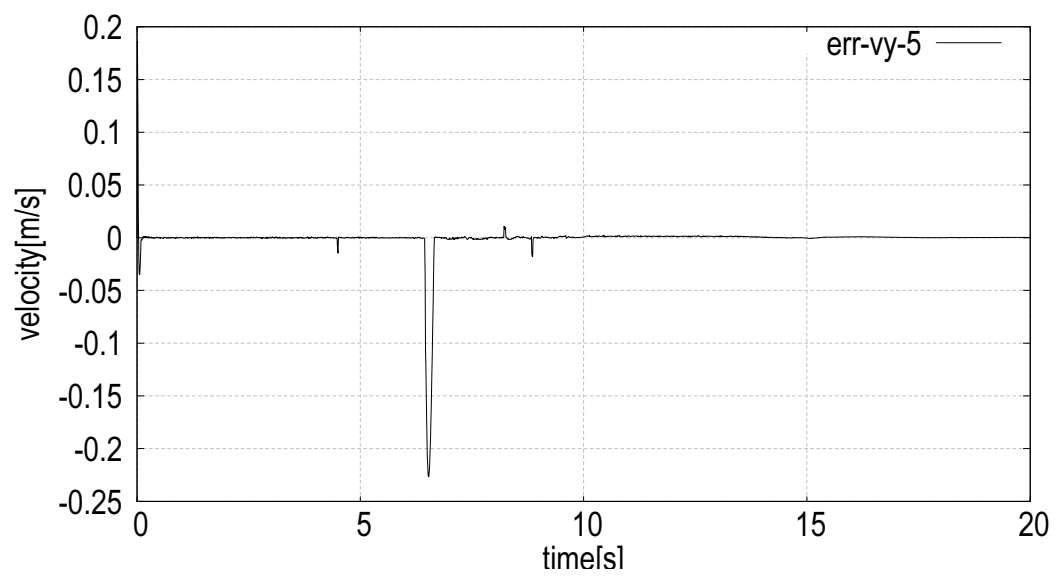


Figure 3.29 Estimation error of velocity in normal direction in fifth link

3.5 分数階微積分を蛇型ロボットの推進へ適用

本節では、分数階微分により表現された摩擦を蛇型ロボットと地面間の摩擦に適用する。

粘性摩擦は通常、速度に比例する形式で定義される。しかし、実際には流体や粘弾性を考慮した方が好ましく、そのために粘性摩擦を分数階微分として定義することが望ましいと言われている。

粘性摩擦項を分数階微分として定義したものとして、Bagley-Torvik 方程式が知られている。この方程式は粘性摩擦項が Newton 流体の法則にしたがい、バネマスー分数階微分ダンパーによって記述される、

$$m\ddot{y}(t) + cD^{\frac{3}{2}}y(t) + ky(t) = F(t), \quad (3.29)$$

$y(t)$ は変位、 $F(t)$ は外力、 m は質量、 c は摩擦係数、 k がバネ定数である。通常の、粘性摩擦項を整数階微分で記述した場合、

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t). \quad (3.30)$$

である。

蛇型ロボットの地面との接触力の摩擦に分数階微分により記述された摩擦を導入する。Grünwald-Letnikov の微分を利用し、微分方程式中の分数階微分項は次の形式で近似計算する。

$$D_t^\alpha \dot{y}(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^L w_j^{(\alpha)} \dot{y}(t - jh) \quad (3.31)$$

ただし、 h はサンプリングインターバル、 w_j の係数は二項係数の漸化式で行う。

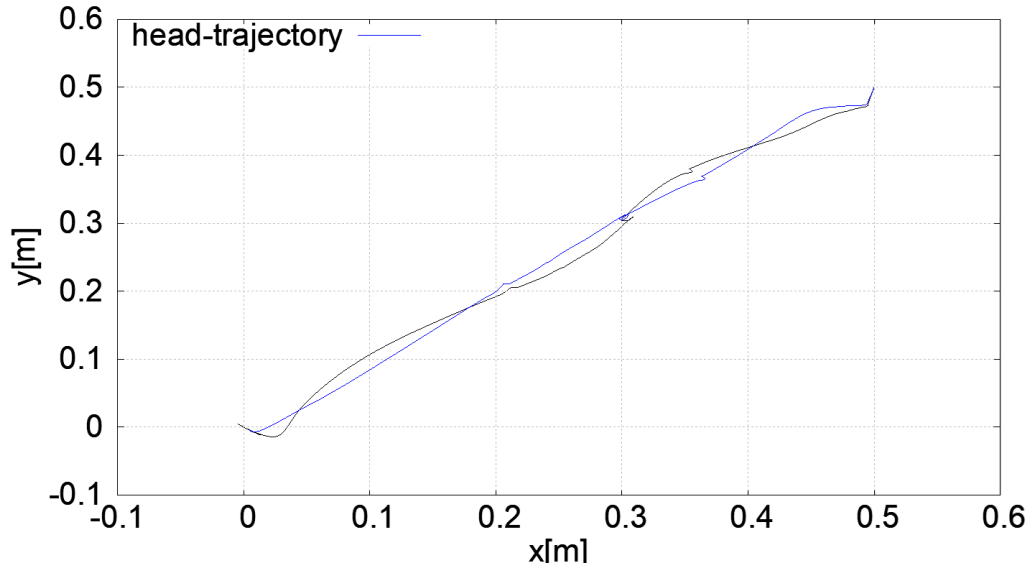


Figure 3.30 Snake head trajectory applied fractional friction.

蛇型ロボットと地面間の接触力の摩擦項に分数階微分を導入すると従来の整数階微分のときの軌道と比較すると、より蛇のくねりが大きくなっていることが確認できる。

3.6 まとめ

本章では、制御対象が意に沿わず地面上を滑ってしまって所望の動作を実行できないときでも、横滑りを抑制しながら目的値収束を実現する制御系の設計法を示した。そして、蛇型ロボットと地面間の接触力の摩擦項に分数階微分を導入した場合の蛇型ロボットの動作を検証した。

まず1節では、制御対象蛇型ロボットの2次元ダイナミクスに対して、隣り合うリンクが1自由度の回転ジョイントによって接続されているモデルで表現し、これをPJ法によって導出した。従来研究では蛇型ロボットのモデルは体幹と垂直な方向には滑らないと仮定していたため、横滑りが発生したときに対処できなかったが、本章では横滑りしないという拘束の代わりにクーロン摩擦と粘性摩擦を導入することで法線方向の動摩擦力の差を表現できるモデルを導出した。この摩擦の影響により、クーロン摩擦が横方向への滑ろうとする力が勝っているときは横滑りが起きない状態を表現し、横方向へ滑ろうとする力が勝ったときは横滑りを起こす状態を表現した。

2節では横滑りを検出するオブザーバの設計を示した。蛇型ロボットの先頭位置と各関節角度のみが観測できるとしてオブザーバを設計した。3節では横滑りを抑制しつつ蛇型ロボットを推進させる制御系を設計した。制御系のベースは従来研究で扱われているSDREによる先頭位置制御系である。ただし、評価関数が横滑りが発生したときに横滑りを抑ええるように働くようにした。

4節では数値シミュレーション上で、提案するオブザーバーと状態フィードバックを組み合わせた制御系により、摩擦係数の低い路面上であっても、蛇型ロボット先頭位置が目標点へと収束することを示した。横滑りが発生した瞬間は推定値と真値に推定誤差が生まれるが、その差も直ちに0へと収束することを確認した。さらに本制御系では、蛇型ロボットに横滑りが発生しても、その横滑りを抑えつつ蛇型ロボットの先頭位置を目標地点に到達させることができた。

5節では数値シミュレーション上にて、分数階微分で記述された蛇型ロボットと地面間との接触力の摩擦項を含めた先頭位置追従制御を実現し、従来の整数階微分の摩擦項との差を示した。

以上の結果から、制御対象モデルに路面との摩擦の影響を考慮することで、滑りやすい路面でも横滑りを抑えつつ推進を実現することができた。提案したモデル、制御系は滑りやすい路面上での推進に対して有効であると結論づけることができる。

4. Lithium-ion Battery の分数次数状態空間表現

本章では 2 章で述べた分数階微積分を LIB に適用することで LIB の詳細なモデルを導出する. はじめに LIB の等価回路モデルを導出し, モデル内の物理パラメータを Particle Swarm Optimization(PSO) により推定する. LIB の等価回路モデルの伝達関数から分数次数の状態空間表現へ実現する.

4.1 等価回路モデルの導出

Fernandez らの研究を参考に, 電気化学インピーダンスとして, Constant Phase Elements(以下 CPE) を考慮した等価回路モデルを導出する [20]. CPE とは電池を等価回路で表した際に既存の素子では表せない電気化学的な性質を持った素子である. 振る舞いとしては抵抗とコンデンサ両方の性質を持ち, 物理パラメータで見立てた場合, コンデンサの表面粗さによって変化が現れるものになっている. CPE の定義式を (4.1) に示す. ただし, T は CPE 定数, α は CPE 指数である.

$$Z_{\text{CPE}} = \frac{1}{(j\omega)^\alpha T} \quad (4.1)$$

α の値が変化することによって性質が変化している. Table 4.1 に α の変化と CPE の特性変化の関係を示す. CPE を回路素子として表現する際は Figure 4.1 のように描く.

Table 4.1 Property of CPE	
Index	Property
$\alpha = 1.0$	Capacitor
$\alpha = 0.5$	Warburg Impedance
$\alpha = 0.0$	Resistance



Figure 4.1 Element of CPE

Figure 4.2 に導出した等価回路モデル, Table 4.2 に各素子の振る舞いを示す. ただし, Table 4.2 中の//は 2 つの素子を並列に接続することを表している. Figure 4.2 の各素子は cole-cole プロット

内で Figure 4.3 のように表される. cole-cole プロットとは, ナイキスト線図の虚部の正負を反転させたグラフである. cole-cole プロットにおいて, インピーダンスベクトルが実軸を横切る点がリチウムイオン電池の合成オーム抵抗 R_0 として表せる. 虚軸の負の領域は高周波でのリチウムイオン電池のインダクタンス L で表すことができる. インピーダンスベクトルが半円を描く領域は CPE と抵抗 R_1 の並列接続で表せ, 電池容量や電極表面に生成される不導体層の厚さを表している. 低周波領域での直線は Warburg インピーダンス $Z_{w\infty}$ で, 電解質や電極表面での粒子の拡散抵抗を表している.

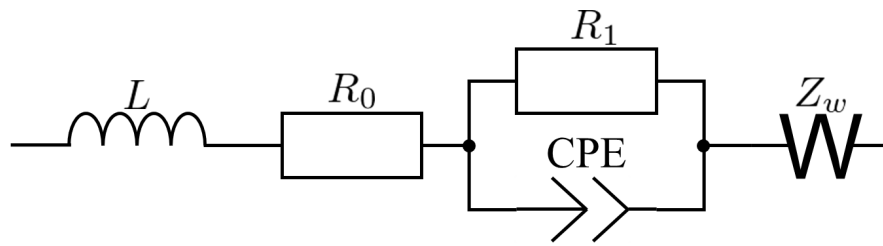


Figure 4.2 The equivalent model of LIB considering the CPE.

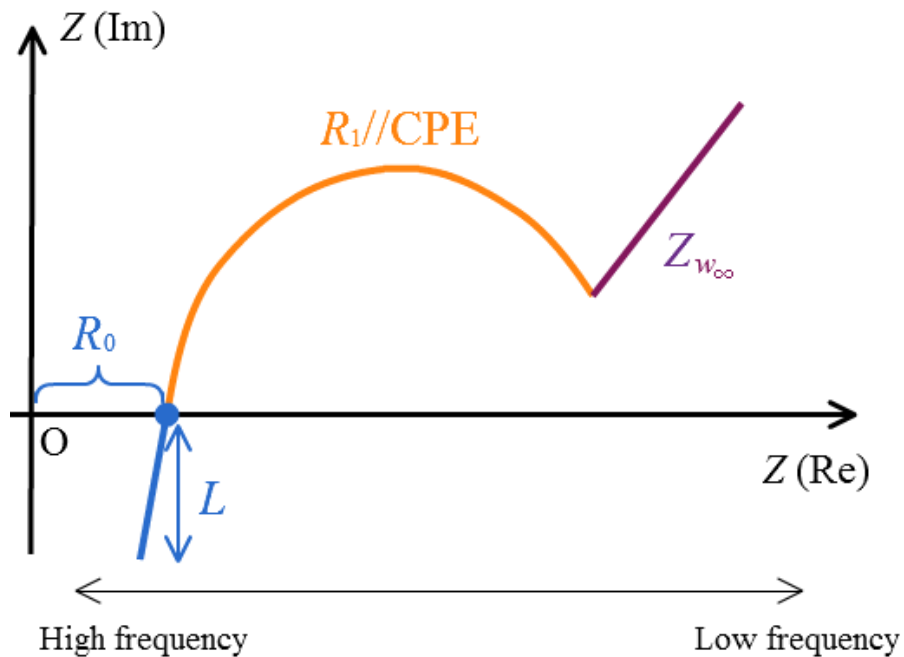


Figure 4.3 Relationship between electrochemical spectroscopy spectra and element

Table 4.2 Elements of LIB

Elements	Physical meaning
L	Inductance in high frequency range
R_0	Combined resistance of electrode electrolyte, separator and connecting part
$R_1//CPE_1$	Changes in battery capacity and ion amount due to change in thickness of nonconductor layer
Z_{W_∞}	Diffusion resistance of Li ions in electrode

4.1.1 伝達関数の導出

CPE のインピーダンス Z_{CPE} を (4.2) に, Warburg インピーダンス Z_{W_∞} を (4.3) に示す. ただし, T を CPE 定数, α を CPE 指数, σ を Warburg 定数とする.

$$Z_{CPE} = \frac{1}{(j\omega)^\alpha T} \quad (4.2)$$

$$Z_{W_\infty} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{j\omega}} \quad (4.3)$$

抵抗 R とコンデンサ C の並列回路のインピーダンス $Z_{R//C}$ は (4.4) となる

$$Z_{R//C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \quad (4.4)$$

(4.4) より, コンデンサを CPE に置き換えると (4.5) となる.

$$Z_{R//CPE} = \frac{1}{\frac{1}{R} + (j\omega)^\alpha T} \quad (4.5)$$

(4.2), (4.3), (4.5) から, 回路のインピーダンス Z は (4.6) となる.

$$Z = j\omega L + R_0 + \frac{R_1}{1 + (j\omega)^\alpha R_1 T} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{j\omega}} \quad (4.6)$$

(4.6) のインピーダンスを実部と虚部分けると (4.7), (4.8) となる.

$$\text{Re}(Z) = R_0 + \frac{R_1(1 + \omega^\alpha R_1 T \cos \frac{\pi}{2} \alpha)}{1 + 2\omega^\alpha R_1 T \cos \frac{\pi}{2} \alpha + (\omega^\alpha R_1 T)^2} + \frac{\sigma}{\sqrt{\omega}} \quad (4.7)$$

$$\text{Im}(Z) = \omega L - \frac{\omega^\alpha R_1 T \sin \frac{\pi}{2} \alpha}{1 + 2\omega^\alpha R_1 T \cos \frac{\pi}{2} \alpha + (\omega^\alpha R_1 T)^2} - \frac{\sigma}{\sqrt{\omega}} \quad (4.8)$$

各周波数の入力に対する実部, 虚部のインピーダンスのデータから (4.7), (4.8) にフィッティングし, 各素子のパラメータを推定する.

4.2 インピーダンス測定実験

リチウムイオン電池のインピーダンスから内部状態を推定するために周波数応答を測定する.

4.2.1 環境構築

周波数領域でリチウムイオン電池の充放電時の電流と電圧を計測する充放電システムを Figure 4.4 に示す. Figure 4.4 において, ガルバノスタットとは, 電気化学測定を行う際に, セルへの電流を一定に保つことのできる装置である. 周波数解析器とは PC など指定された周波数のデジタル入力に対し, アナログ信号を出力する装置である. 応答信号から, 出力した信号と同じ周波数の信号成分を抽出できるため, 周波数解析に用いることができる. また, 周波数を自動的にスイープできるため, 電気化学インピーダンス分光法の測定を簡単に行うことができる.

本システムでは, PC から正弦波のデジタル信号を周波数解析器へ送信する. 周波数解析器でアナログ電流をガルバノスタットを通してリチウムイオン電池に入力し, リチウムイオン電池の出力電流と出力電圧をガルバノスタットで計測する. そして, リチウムイオン電池の電流, 電圧データと周波数解析値を周波数解析器でデジタル信号に変換し, PC へ送信する. 以上の流れをリチウムイオン電池への入力電流の周波数を変化させて測定する.

4.2.2 測定結果

3.1 節のシステムと同様のシステムで株式会社エヌエフ回路設計ブロック様に計測して頂いたデータからインピーダンスを導出し, cole-cole プロットに直したものを Figure 4.5 に示す. ただし, 計測条件は Table 4.3 とした.

このデータを用いて等価回路モデルの物理パラメータを PSO で推定する.

Table 4.3 Experimental condition

Components	Conditions
Battery	Single cell LIB
Input	Current
Output	Voltage
Number of data	101
Current	1.0
Frequency[Hz]	0.1 – 2000
Average number of trial	20

4.3 Particle Swarm Optimization によるパラメータ推定

本節では, 等価回路モデルのパラメータを推定するアルゴリズムについて述べる.

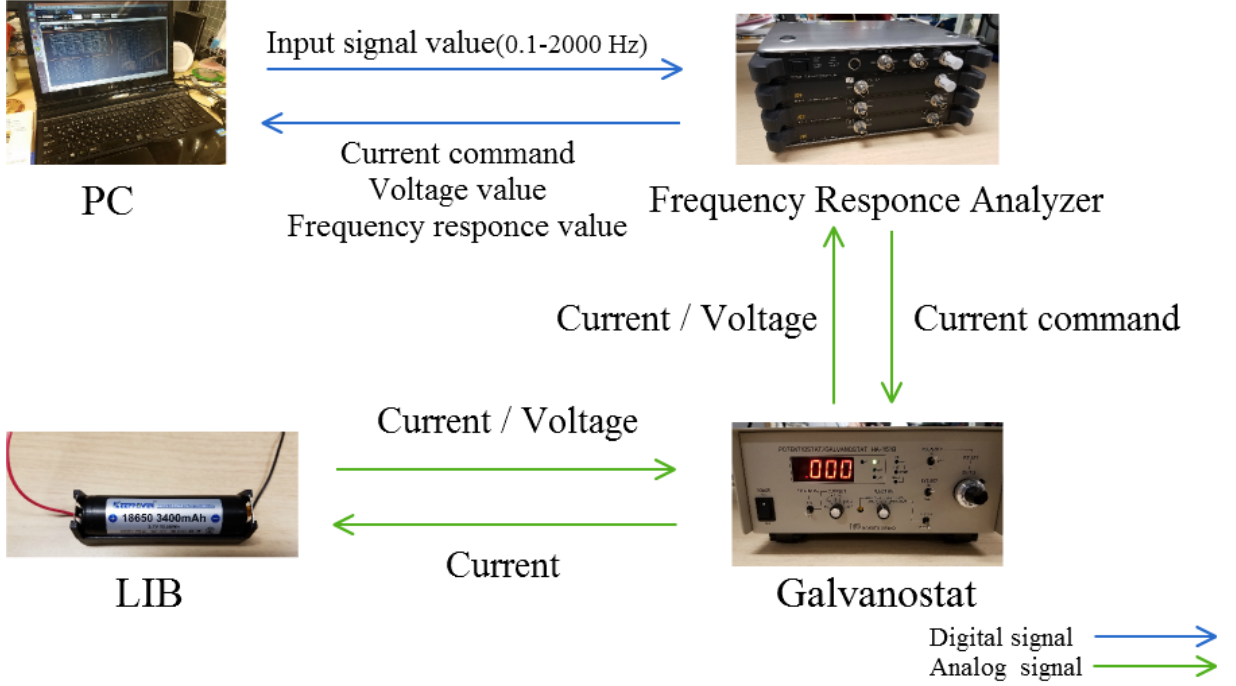


Figure 4.4 Experimental system.

4.3.1 PSO について

物理パラメータの大域的な推定にはPSOを用いる。PSOとは M 次元探索空間 S_0 で、正規関数 F の最小値を求めるアルゴリズムである。探索対象の関数内に N 個の粒子を配置し、粒子が互いに情報を共有し、探索空間内を移動することで最適解を求める[59]。(4.9)に探索の終了条件を示す。ただし、 F の最小値は0に正規化されており、 F がある閾値 c_1 以下となる $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_M) \in S_0$ を探索し、(4.9)を満たすまで繰り返し計算する。

$$F(\mathbf{x}) \leq c_1 \quad (4.9)$$

各粒子は S_0 内で初期位置から初期速度で動作を開始する。その動作にはパーソナルベスト(以下Pbest)とローカルベスト(以下Lbest)を用いる。Pbestとは、 ${}^k\mathbf{p}$ ($k = 1, 2, \dots, N$)で表され、 k 番目の粒子における時刻 n までの最良の粒子位置であり、(4.10)を満たす。ただし、 $n(n = 0, \dots, n_p)$ は離散時間におけるステップ数とする。

$$F({}^k\mathbf{p}) \leq F({}^k\mathbf{x}(n)) \quad (4.10)$$

全ての粒子のPbestの中でも最良の粒子位置のことをグローバルベスト(以下Gbest)といい、時刻 n_p での近似解である。Lbestは ${}^k\mathbf{l}$ で表され、 k 番目の粒子と結合した粒子のPbestの最良値である。全粒子が結合している場合はLbestとGbestは一致する。粒子の更新式は(4.11), (4.12)で表される。ただし、 ${}^k\mathbf{v}_m(n), {}^k\mathbf{x}_m(n)$ ($m = 0, 1, \dots, M$)はある次元 m での時刻 n における k 番目

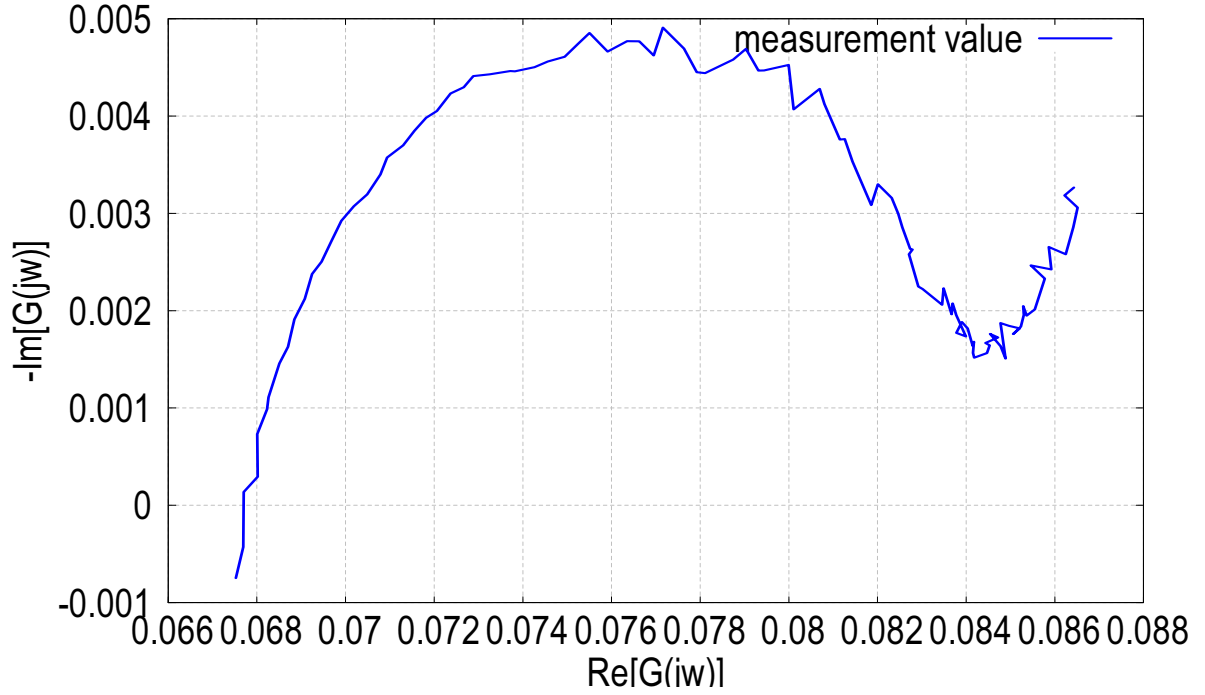


Figure 4.5 Supplied measurement data

の粒子の速度と位置とする。また, w, ρ_1, ρ_2 は $0 \leq w, \rho_1, \rho_2 \leq 1$ を満たすパラメータであり, 乱数によって与えられる。

$${}^k\mathbf{v}_m(n+1) = w {}^k\mathbf{v}_m(n) + \rho_1 ({}^k\mathbf{p}_m - {}^k\mathbf{x}_m(n)) + \rho_2 ({}^k\mathbf{l}_m - {}^k\mathbf{x}_m(n)) \quad (4.11)$$

$${}^k\mathbf{x}_m(n+1) = {}^k\mathbf{x}_m(n) + {}^k\mathbf{v}_m(n) \quad (4.12)$$

Pbest は各時刻において $F({}^k\mathbf{x}(n)) < F({}^k\mathbf{p})$ を満たすとき, (4.13) で更新される。

$${}^k\mathbf{p} = {}^k\mathbf{x}(n) \quad (4.13)$$

Pbest の更新に伴い Lbest, Gbest も更新され, Gbest が (4.14) を満たした時に探索を終了する。ただし, ${}^k\mathbf{g}$ は Gbest である。

$$F({}^k\mathbf{g}) \leq c_1 \quad (4.14)$$

本研究ではインピーダンスの計測値と推定値の差の2乗を関数とし, 誤差が最小となるパラメータを推定する。

4.3.2 PSO によるパラメータ推定結果

4.3.1 節のアルゴリズムを用いて, Table 4.4 の条件でリチウムイオン電池の物理パラメータを推定した結果を Table 4.5 に示す。ただし, 4.3.1 における閾値 c_1 は $c_1 = 1.0 \times 10^{-6}$ とした。

Table 4.4 Optimization condition of PSO

Description	condition
particle number	500
trial number	388
$L[\text{H}]$	$0 \leq L \leq 100$
$R_0[\Omega]$	$0.05 \leq R_0 \leq 0.07$
$R_1[\Omega]$	$0 \leq R_1 \leq 100$
$\alpha[-]$	$0 \leq \alpha \leq 1$
$T[-]$	$0 \leq T \leq 100$
$\sigma[-]$	$0 \leq \sigma \leq 100$

Table 4.5 Parameter estimation based on PSO.

Circuit element	Value
$L[\text{H}]$	1.12×10^{-6}
$R_0[\Omega]$	6.63×10^{-2}
$R_1[\Omega]$	1.79×10^{-2}
$\alpha[-]$	6.33×10^{-1}
$T[-]$	3.42
$\sigma[-]$	8.56×10^{-6}

4.3.3 推定したパラメータの妥当性の検証

Table 4.5 のパラメータを (4.6) に代入し、周波数 0.1~2000 Hz でプロットした結果と計測データを Figure 4.6 に示す。Figure 4.6 より、計測データに対してフィッティングできていることが分かる。野口らの研究での LM 法を用いたフィッティング結果を Figure 4.7 に示す [1]。それぞれのフィッティング結果の平均二乗誤差と適合率 [60] を Table 4.6 に示す。Table 4.6 より、[1] の LM 法でのパラメータ推定が本研究での PSO での推定よりも高い精度で推定できていることが分かる。しかし、[1] ではオフラインであらかじめパラメータを設定していた。PSO を用いて一括でパラメータを推定できたため、本研究ではオンラインで等価回路モデルのパラメータを一括で推定することを目指す。

Table 4.6 Mean square error and fitting ratio

Identification method	Mean square value [-]	fitting ratio [%]
PSO(propose)	3.1958×10^{-8}	97.0932
LM(previous)	2.7172×10^{-8}	97.2159

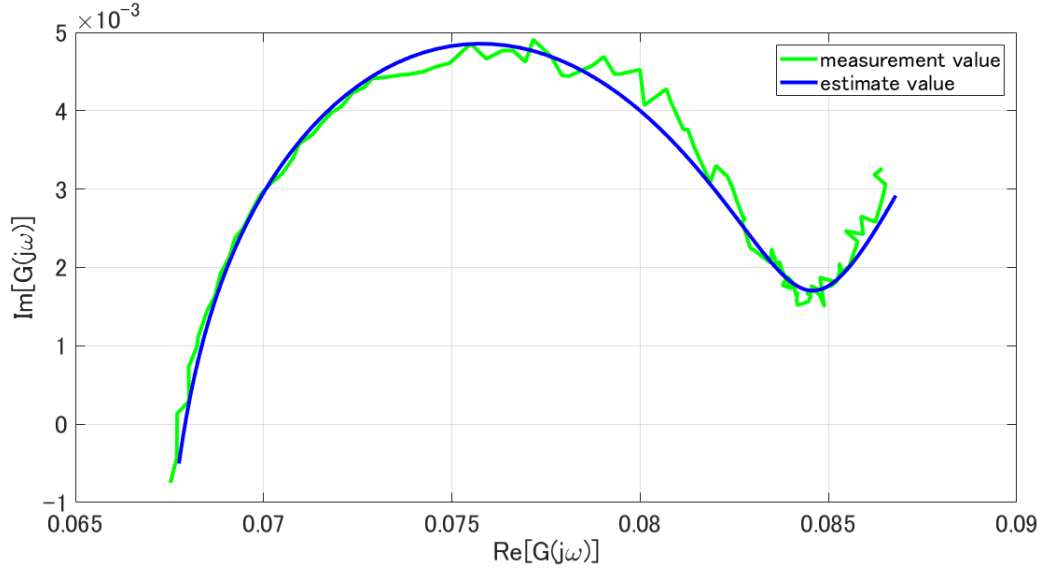


Figure 4.6 Fitting result based on PSO

4.4 分数次数状態空間表現

4.1.1 節にて導出された LIB の伝達関数 (4.6) をラプラス演算子 s により書き直す.

$$Z(s) = sL + R_0 + \frac{R_1}{1 + s^\alpha R_1 T} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{s}}. \quad (4.15)$$

しかしながら, 高周波帯域で影響するインダクタンス成分 sL を含む伝達関数 (4.15) はインプロパーであるため, 状態空間表現へ実現することができない. そのため, 本研究では, LIB 単体の特性を表している低から中間周波数帯域に着目して分数階状態空間表現を求める. この時の伝達関数は

$$Z(s) = R_0 + \frac{R_1}{1 + s^\alpha R_1 T} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{s}}, \quad (4.16)$$

となる.

Table 4.5 の PSO によるパラメータ同定結果から, $\alpha = 0.633$ を $\alpha \approx 2/3$ と近似する. つまり (4.8) は CPE 部分に $s^{2/3}$ の, Warburg インピーダンスに $s^{1/2}$ の分数次数を持つ伝達関数と記述できる. この分数次数分母の最小公倍数 m が 6 であることから, 状態方程式の微分オペレータは $D^{1/6}$ と記述できる. 以上から LIB の分数次数状態空間表現は

$$D^{1/6}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u, \quad (4.18)$$

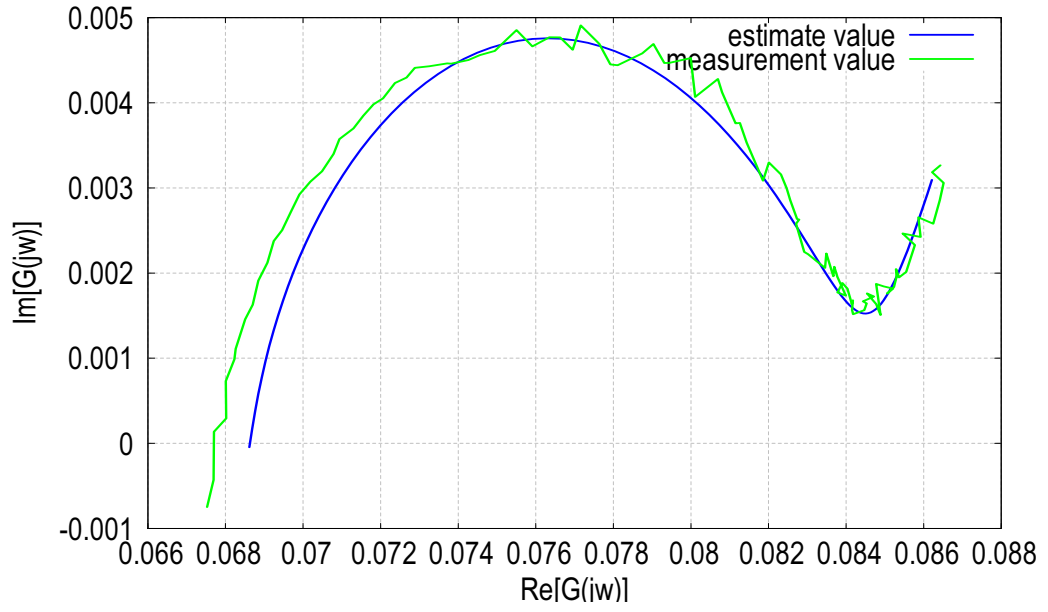


Figure 4.7 Fitting result based on the previous work with LM

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{TR_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\sigma}{R_1 T} & 0 & 0 & \frac{1}{T} & \sqrt{2}\sigma & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} R_0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

と与えられる.

5. 分数次数システムのシミュレーション方式

(5.5)-(5.6) で与えられる分数次数状態空間表現の解軌道を計算することができるということは、すなわち、分数次数システムの時間応答をシミュレーションできるということである。そのため、本章では、分数次数システムを数値的に計算する手法を述べる。はじめに、分数次数状態空間表現の構築手法について述べ、外生入力を持つ分数次数システムの状態方程式を外生入力を持たない形式へと変形する方法について述べ、変形した状態方程式の解軌道をジョルダン標準形の考えを用いた計算手法を述べる。最後に、4章で導出した LIB の状態空間表現の時間応答を計算することで本提案手法の有効性を示す。

5.1 分数階微積分による状態空間表現

本節では 2.2.4 節で示した定理 2 の関係を使うことで、分数次数で表現されるシステムの状態空間表現を導出する。

外生入力がない場合の一般の (n, m) 次の分数次数を有するシステムは次式で表せる。

$$\left[D_m^{\frac{n}{m}} + a_1 D_m^{\frac{n-1}{m}} + \cdots + a_n D_m^0 \right] x(t) = 0 \quad (5.1)$$

ただし、 n は自然数、 m は分母時数の分母の最小公倍数であり、 $l-1 \leq \frac{n}{m} \leq l$ (l は自然数) とする。状態量を

$$\begin{cases} x_1(t) \triangleq x(t) \\ x_2(t) \triangleq D_m^{\frac{1}{m}} x_1(t) = D_m^{\frac{1}{m}} x(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \triangleq D_m^{\frac{1}{m}} x_{n-1}(t) = D_m^{\frac{n-1}{m}} x(t) \end{cases}$$

とすると、次の状態空間表現が得られる。

$$D_m^{\frac{1}{m}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad (5.2)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ 、 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ は次のように表される。

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T \quad (5.3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

(5.2) が (5.1) を表現できているか, n 行目を計算して確認する.

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{m}} x_n(t) &= \begin{bmatrix} -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ D^{\frac{1}{m}} x_n(t) &= -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \cdots - a_1 x_n(t) \\ D^{\frac{1}{m}} (D^{\frac{n-1}{m}} x(t)) &= -a_n D^0 x(t) - a_{n-1} D^{\frac{1}{m}} x(t) - \cdots - a_1 D^{\frac{n-1}{m}} x(t) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} D^{\frac{n}{m}} x(t) + a_1 D^{\frac{n-1}{m}} x(t) + \cdots + a_{n-1} D^{\frac{1}{m}} x(t) + a_n D^0 x(t) &= 0 \\ \left[D^{\frac{n}{m}} + a_1 D^{\frac{n-1}{m}} + \cdots + a_{n-1} D^{\frac{1}{m}} + a_n D^0 \right] x(t) &= 0 \end{aligned}$$

以上より, (5.2) は (5.1) を正しく表現できていることが確認できた.

(5.2) に入力 $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^r$ が加わった場合も, 同様にして一般化する. すなわち, 任意の $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times r}$ 行列を用い, (n, m) 次分数次微分システムの状態空間表現が次のように表せる.

$$D^{\frac{1}{m}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \quad (5.6)$$

この (5.5) の解は (5.7) となる.

$$\mathbf{x}(t) = E_{\frac{1}{m}, 1}(\mathbf{A} t^{\frac{1}{m}}) \mathbf{x}(0) + \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{m} - 1} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}}(\mathbf{A} (t - \tau)^{\frac{1}{m}}) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (5.7)$$

(5.7) 中の $E_{\alpha, \beta}(\cdot)$ は Mittag-Leffler 関数 [73] と呼ばれ, (5.8) で定義される.

$$E_{\alpha, \beta}(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha \leq 0, \beta \leq 0) \quad (5.8)$$

(5.7) が (5.5) の解であるか, (5.2) より確認する. 入力がない時の解は,

$$\mathbf{x}(t) = E_{\frac{1}{m}, 1}(\mathbf{A} t^{\frac{1}{m}}) \mathbf{x}_0 \quad (5.9)$$

となる.(5.9) に (5.8) を適用し, 級数展開する.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= E_{\frac{1}{m}, 1}(\mathbf{A} t^{\frac{1}{m}}) \mathbf{x}_0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A} t^{\frac{1}{m}})^k}{\Gamma(\frac{1}{m} k + 1)} \mathbf{x}_0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A} t^{\frac{1}{m}})^k}{\frac{k!}{m!}} \mathbf{x}_0 \\ &= \left(\frac{\mathbf{A}^0 t^0}{1} + \frac{\mathbf{A}^1 t^{\frac{1}{m}}}{\frac{1!}{m!}} + \frac{\mathbf{A}^2 t^{\frac{2}{m}}}{\frac{2!}{m!}} + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

これを $\frac{1}{m}$ 階微分することで (5.2) になるか確認する.

$$D^{\frac{1}{m}} \mathbf{x}(t) = D^{\frac{1}{m}} \left[\left(\frac{\mathbf{A}^0 t^0}{1} + \frac{\mathbf{A}^1 t^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^{\frac{2}{m}}}{\frac{2}{m}!} + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \right]$$

今回の論文では, 分数階微分には caputo の定義を適用しており, この定義においては定数の微分は 0 となるため, 右辺の初項の微分は 0 となる. したがって,

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{m}} \mathbf{x}(t) &= 0 + D^{\frac{1}{m}} \left[\left(\frac{\mathbf{A}^1 t^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^{\frac{2}{m}}}{\frac{2}{m}!} + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \right] \\ &= \left(\frac{\mathbf{A}}{\frac{1}{m}!} \frac{\Gamma(\frac{1}{m} + 1)}{\Gamma(1)} t^0 + \frac{\mathbf{A}^2}{\frac{2}{m}!} \frac{\Gamma(\frac{2}{m} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{m} + 1)} t^{\frac{1}{m}} + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{I} t^0}{\Gamma(1)} + \frac{\mathbf{A} t^{\frac{1}{m}}}{\Gamma(\frac{1}{m} + 1)} + \frac{\mathbf{A}^2 t^{\frac{2}{m}}}{\Gamma(\frac{2}{m} + 1)} + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{A} E_{\frac{1}{m}, 1}(\mathbf{A} t^{\frac{1}{m}}) \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

と計算できるため, 解が正しいと確認できた.

次に, $m = 2, A = 2, x(0) = x_0$ としたときのシステム

$$D^{\frac{1}{2}} x(t) = 2x(t) \tag{5.10}$$

$$x(t) = E_{\frac{1}{2}, 1}(2t^{\frac{1}{2}}) x_0 \tag{5.11}$$

の解が正しいか確認する.

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} x(t) &= D^{\frac{1}{2}} \left(E_{\frac{1}{2}, 1}(2t^{\frac{1}{2}}) x_0 \right) \\ &= D^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2^0 t^0}{\Gamma(1)} + \frac{2^1 t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{2^2 t^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(2)} + \cdots \right) x_0 \\ &= \left(0 + \frac{2^1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} t^0 + \frac{2^2}{\Gamma(\frac{4}{2})} \frac{\Gamma(\frac{4}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} + \frac{2^3}{\Gamma(\frac{5}{2})} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} t^{\frac{2}{2}} + \cdots \right) x_0 \\ &= 2 \left(\frac{2^0 t^0}{\Gamma(1)} + \frac{2^1 t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{2^2 t^{\frac{2}{2}}}{\Gamma(2)} + \cdots \right) x_0 \\ &= 2 E_{\frac{1}{2}, 1}(2t^{\frac{1}{2}}) x_0 \\ &= 2x(t) \end{aligned} \tag{5.12}$$

計算より, (5.12) と (5.10) が一致していることが確認できた.

5.2 状態方程式の拡大系への変換

いま, (5.5)-(5.6) で与えられる分数次数状態方程式において, 外生入力のない場合を考えると,

$$D^{\frac{1}{m}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \tag{5.13}$$

となり, これに伴い解軌道は

$$\mathbf{x}(t) = E_{\frac{1}{m}, 1}(\mathbf{A}t^{\frac{1}{m}})\mathbf{x}(0), \quad (5.14)$$

で与えられる. 一般の外生入力がある (5.5) の場合には, Mittag-Leffler 関数の closed-form が無いために, 畳み込み積分の項をまともに計算すると, 時間経過とともに常に積分計算しなおすことになる. そこで本研究では, デジタル制御の考え方を導入し, サンプルングインターバル内では外生入力が一定 $u(t) = u_k, (k-1)\Delta t \leq t < k\Delta t$ とみなせると仮定する.

$$u(t) = u_k, (k-1)\Delta t \leq t < k\Delta t, \quad (5.15)$$

ただし Δt はサンプルングインターバルである. Caputo の分数次数微分の定義では一定値 u_k の分数次数分は 0 となる.

$$D^{\frac{1}{m}}u_k = 0, \quad (5.16)$$

ただし, Riemann-Liouville の定義では成り立たないので注意する. (5.16) を (5.5) へ導入することで, 外生入力があるシステムは拡大系に変形できる. 拡大系は自由応答系とみなすことができるので, 分数次数の状態方程式は行列 Mittag-Leffler 関数を用いて解くことができる. 状態方程式を変形した拡大系は

$$D^{\frac{1}{m}}\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(0), \quad \bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

であり, この解軌道は

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = E_{\frac{1}{m}, 1}(\bar{\mathbf{A}}t^{\frac{1}{m}})\bar{\mathbf{x}}(0). \quad (5.18)$$

しかし, システム行列 $\bar{\mathbf{A}}$ が重複固有値を持つ場合がある. 行列 Mittag-Leffler 関数の計算は, システム行列 $\bar{\mathbf{A}}$ が重複固有値を持つ場合と持たない場合で, 計算方法が変化するため, この点に注意する必要がある.

5.3 行列 Mittag-Leffler 関数の計算方式

前節で得たシステム行列 $\bar{\mathbf{A}}$ が重根を持つ場合と持たない場合の計算方式を説明する.

重根を持つ場合, (5.18) 内の行列 Mittag-Leffler 関数を計算するときには [74] のように $\bar{\mathbf{A}}$ をジョルダン標準形に変形してから 3 パラメータ行列 Mittag-Leffler 関数を適用して計算する必要がある.

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PJP}^{-1}, \quad (5.19)$$

によりジョルダン分解し, このときのジョルダン標準形 \mathbf{J} とジョルダンプロック \mathbf{J}_k は

$$\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_n), \quad (5.20)$$

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

であり, $k = 1, \dots, n$ は固有値の個数, λ_k は固有値である. 3 パラメータ行列 Mittag-Leffler 関数は次の式を計算する.

$$E_{\alpha, \beta}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{P} \text{diag}(E_{\alpha, \beta}(\mathbf{J}_1), E_{\alpha, \beta}(\mathbf{J}_2), \dots, E_{\alpha, \beta}(\mathbf{J}_s)) \mathbf{P}^{-1}, \quad (5.22)$$

$$E_{\alpha, \beta}(\mathbf{J}_k) = \begin{bmatrix} E_{\alpha, \beta}(\lambda_k) & E_{\alpha, \beta+\alpha}^2(\lambda_k) & E_{\alpha, \beta+2\alpha}^3(\lambda_k) & \cdots & E_{\alpha, \beta+(m_k-1)\alpha}^{m_k}(\lambda_k) \\ 0 & E_{\alpha, \beta}(\lambda_k) & E_{\alpha, \beta+\alpha}^2(\lambda_k) & \cdots & E_{\alpha, \beta+(m_k-2)\alpha}^{m_k-1}(\lambda_k) \\ 0 & 0 & E_{\alpha, \beta}(\lambda_k) & \cdots & E_{\alpha, \beta+(m_k-3)\alpha}^{m_k-2}(\lambda_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\alpha, \beta+\alpha}^2(\lambda_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\alpha, \beta+\alpha}(\lambda_k) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

$$E_{\alpha, \beta}^\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!} \quad (5.24)$$

$\rho = 1$ のとき,

$$E_{\alpha, \beta}^1(z) = E_{\alpha, \beta}(z) \quad (5.25)$$

であり, 通常の Mittag-Leffler 関数を計算することと同義である.

重根を持たない場合には, $\bar{\mathbf{A}}$ を固有値分解し, 固有値行列内の各固有値ごとに Mittag-Leffler 関数を計算すればよい.

$$E_{\alpha, \beta}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{P} \text{diag}(E_{\alpha, \beta}(\lambda_1), E_{\alpha, \beta}(\lambda_2), \dots, E_{\alpha, \beta}(\lambda_n)) \mathbf{P}^{-1}. \quad (5.26)$$

5.4 LIB での数値計算

4.4 節で求めた状態方程式を提案手法に沿って拡大系へと変形する. 変換した拡大系は

$$D^{\frac{1}{6}} \bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(t), \quad (5.27)$$

となり, 解軌道は

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = E_{\frac{1}{6},1}(\bar{\mathbf{A}}t^{\frac{1}{6}})\bar{\mathbf{x}}(0), \quad (5.28)$$

である. ここで

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{TR_1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & u_k \end{bmatrix}^T. \quad (5.30)$$

このシステムは重根を持つため, 5.3 節の計算方式に従って (5.28) 内の行列 Mittag-Leffler 関数を計算する. LIB のシステム行列 $\bar{\mathbf{A}}$ をジョルダン分解すると

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{J}_{LIB}\mathbf{P}^{-1}, \quad (5.31)$$

と書け, このときのジョルダン標準形 \mathbf{J}_{LIB} とジョルダンブロック \mathbf{J}_1 は

$$\mathbf{J}_{LIB} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_5), \quad (5.32)$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

である. 3 パラメータ行列 Mittag-Leffler 関数は,

$$E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{P}\text{diag}(E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\mathbf{J}_1), E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\mathbf{J}_2), \dots, E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\mathbf{J}_5))\mathbf{P}^{-1}, \quad (5.34)$$

$$E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\mathbf{J}_1) = \begin{bmatrix} E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\lambda_1) & E_{\frac{1}{6},\frac{2}{6}}^2(\lambda_1) & E_{\frac{1}{6},\frac{3}{6}}^3(\lambda_1) & E_{\frac{1}{6},\frac{4}{6}}^4(\lambda_1) \\ 0 & E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\lambda_1) & E_{\frac{1}{6},\frac{2}{6}}^2(\lambda_1) & E_{\frac{1}{6},\frac{3}{6}}^3(\lambda_1) \\ 0 & 0 & E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\lambda_1) & E_{\frac{1}{6},\frac{2}{6}}^2(\lambda_1) \\ 0 & 0 & 0 & E_{\frac{1}{6},\frac{1}{6}}(\lambda_1) \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

この計算を解くことで分数次微分システムの時間応答を数値的に求めることが可能となる. サンプリングインターバルを 0.1 ms, シミュレーション時間を 0.4 s, 入力を 1 としたときの各状態の時

間応答を Figure 5.1 に, その時の出力を Figure 5.2 に示す. Figure 5.1 では立ち上がりで突入電流が印加され, その後は漸近的に収束している. Figure 5.2 では抵抗 R_0 の値が初期値となり, どうように漸近的に収束していることが確認できる.

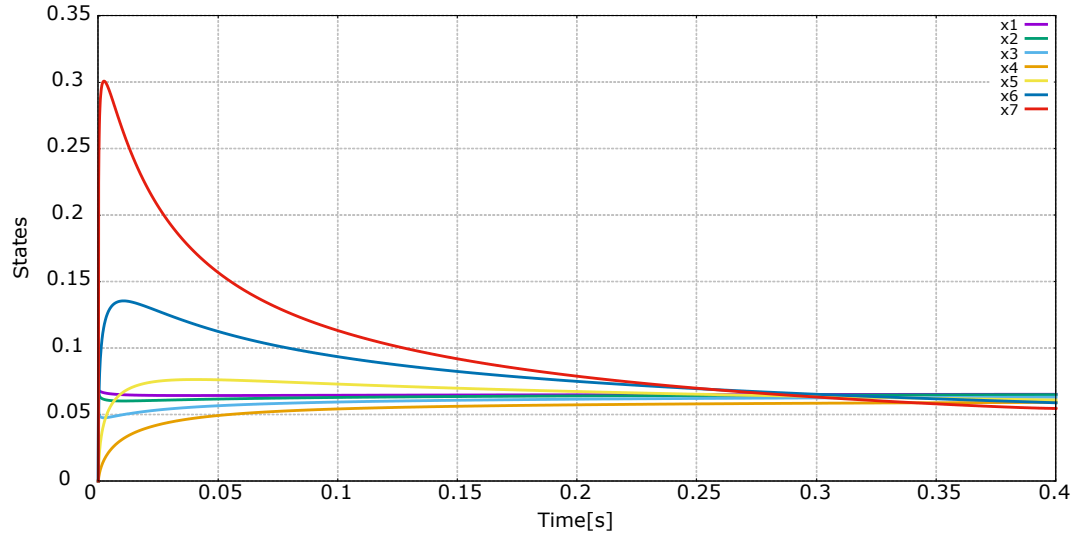


Figure 5.1 Time response of LIB with fractional order differential equation.

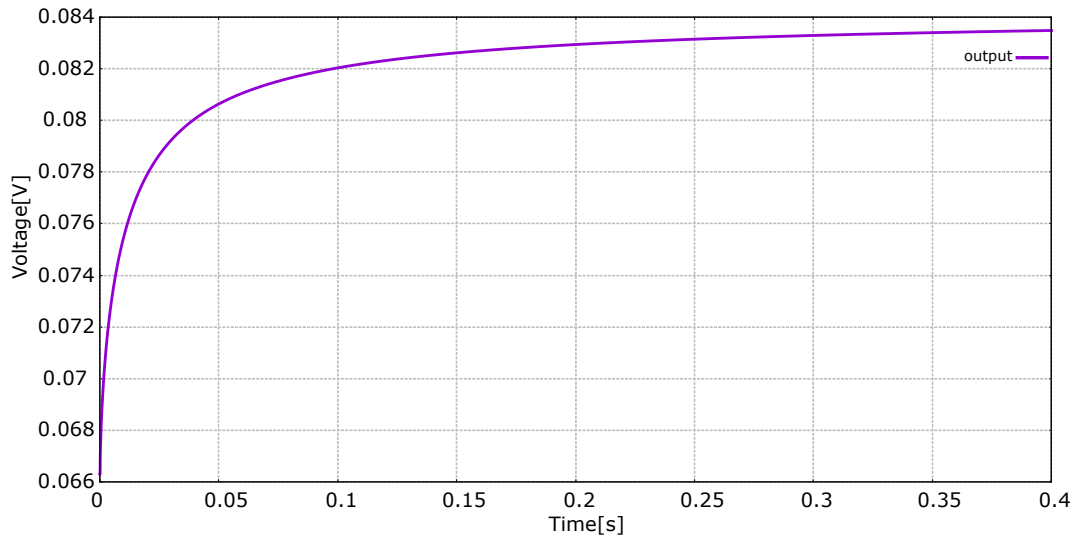


Figure 5.2 Output of LIB with fractional order differential system.

6. 結論と今後の展望

6.1 結論

本論文では分数次数システムに対する時間応答を数値的に求めることを目的とした。2章では Riemann-Liouville の分数階微積分や Caputo の分数階微分の定義について説明し、一般的な分数階システムの状態空間表現方法や解軌跡を示した。

4章では CPE を考慮した LIB の等価回路モデルを導出し、等価回路モデルから伝達関数を求めた。等価回路の伝達関数に対して PSO を適用することでオンラインでの複数パラメータの同時推定を行った。推定した CPE の指数と Warburg インピーダンスの次数から分数次数を $1/6$ と決定し、分数階の状態空間表現を構築した。

5章では分数階システムの時間応答を数値的に求めるために、分数次数システムの状態空間表現を拡大系へ拡張し、計算する解軌跡を簡略化する手法を提案した。提案したシミュレーション方式を LIB の分数階の状態空間表現に適用し、実際に時間領域内でシミュレーションできていることが確認できた。

6.2 今後の展望

本論文で提案したシミュレーション方式により、時間領域での分数階システムの数値計算を分数次数を近似せずにシミュレーション出来るようになった。しかし、Mittag-Leffler 関数の無限級数の計算ではこちらでプログラム上で上限の項数を決める必要があり、その項数を少なく見積もると Mittag-Leffler 関数の値が発散してってしまう問題がある。実際、ほかの文献でも同様の課題が残っている。今後はこの課題に取り組みつつも、LIB のオンラインでの劣化診断を目標に、提案したシミュレーション方式を使用したオンラインでの観測器の設計や状態推定を行う。

参考文献

- [1] 足立 修一, 廣田 幸嗣ほか, “バッテリーマネジメント工学”, 東京電機出版局, pp1-5,19-20,36-44, 2015
- [2] 猿渡 秀郷 ほか, “リチウムイオン電池概要と応用事例”, 日本 AEM 学会誌 vol.24, No.4, pp.287-292, 2016
- [3] K.Mizushima et al, “ $\text{Li}_x\text{CoO}_2(0 < x < 1)$:A new cathode material for batteries of high energy density”,Materials Research Bulletin, Vol.15, No.6, pp.783-789, 1980
- [4] 池田 宏之助, 生川 訓, 中島 仁志, 再生可能なりチウム電池, 日本国特許第 1769661 号, 出願 1981
- [5] 厨子敏博 ほか, “リチウムイオンポリマー電池の開発”, 三菱電線工業時報, 98 号, pp74-78, 2001
- [6] 古積 博 ほか, “金属スクラップ堆積物の火災事例と問題点”, 災害事例分析, Vol.52 No.2, pp113-120,2013
- [7] 境 哲男, “電気自動車と機能紙, EV 電池の開発動向と課題”, 機能紙研究会誌 No.49, pp.3-14, 2010
- [8] 竹野 和彦, 山木 準一, “携帯電話用リチウムイオン電池の熱暴走及び容量劣化評価法”, 電子情報通信学会論文誌 B, Vol.J93-B, No.9, pp1296-1302, 2010
- [9] 佐藤 宣夫, 牛崎 拓, “蓄電素子を複合化したポータブル電源の開発”, 千葉工業大学研究報告 No.64, pp.9-14,2017
- [10] 中山 知紀 ほか, “入出力と貯蔵容量を分担するバッテリーキャパシタハイブリッド蓄電システムの提案と動作検証”, 電気学会論文誌 B Vol.134 No.1, pp.76-83, 2014
- [11] 福永 しおり, “等価回路を用いたリチウムイオン 2 次電池のパラメータ推定”, 第 53 回自動制御連合講演会, pp577-580, 2010
- [12] 松島 敏雄, “放電電圧特性からの据置用リチウムイオン二次電池の容量推定”, 電気情報通信学会論文誌 B, Vol.J89-B No.4, pp618-624, 2006

- [13] 岡田 修平, “リチウムイオン電池の劣化診断技術の開発”, 横河技報, Vol.56 No.2, pp73–76, 2013
- [14] 馬場 厚志, 足立 修一, “シリーズカルマンフィルタ法を用いた二次電池の充電率推定”, 電気学会論文誌 D, Vol.132 No9, pp907–914, 2012
- [15] 馬場 厚志, 足立 修一, “対数化 UKF を用いたリチウムイオン電池の状態とパラメータの同時推定”, 電気学会論文誌 D, Vol.133 No12, pp1139–1147, 2013
- [16] 彦野 壮三朗 ほか, “温度特性を考慮したリチウムイオン二次電池の充電率と物理パラメータの同時推定”, 第 57 回自動制御連合講演会, pp1443–1444, 2014
- [17] YANG, Qingxia, et al, “A simplified fractional order impedance model and parameter identification method for lithium-ion batteries”, PloS one, pp1–13, 2017
- [18] Akram Eddahech, et al, “Behavior and state-of-health monitoring of Li-ion batteries using impedance spectroscopy and recurrent neural networks”, Electrical Power and Energy Systems 42, pp487-494, 2012
- [19] 野口 隼汰, “電気化学インピーダンスを考慮したリチウムイオン電池モデルの同定”, 学士論文, 東京電機大学, 2017
- [20] Carlos Pastor-Fernandez et al, “Identification and Quantification of Ageing Mechanisms in Lithium-ion Batteries using the EIS technique”, In Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC), IEEE, pp.1–6, 2016
- [21] 高松尚宏: “分数階微積分を有する非線形制御系と適応制御系の設計”, 慶應義塾大学大学院理工学研究科 学位論文 博士 (工学).
- [22] S. MANABE, The Non-integer Integral and its Application to Control Systems, The Journal of the Institute of Electrical Engineers of Japan, 1960, Volume 80, Issue 860, Pages 589-597, Released November 20, 2008, Online ISSN 2187-6797, Print ISSN 0020-2878, <https://doi.org/10.11526/ieejjournal1888.80.589>, https://www.jstage.jst.go.jp/article/ieejjournal1888/80/860/80_860_589/_article/-char/en
- [23] 池田富士雄, 川田誠一, 渡辺敦: “分数次微分システムの最適レギュレータ”, 計測自動制御学会論文集 Vol.37, No.9, 856-861, 2001.
- [24] Saptarshi Das, Indranil Pan, Shantanu Das, Amitava Gupta: “A novel fractional order fuzzy PID controller and its optimal time domain turning based on integral performance indices”, Engineering Applications of Artificial Intelligence 25 430-442, 2012

- [25] Swati Sondhi, Yogesh V.Hote:“Fractional order PID controller for load frequency control”,Energy Conversion and Management 85 343-353,2014
- [26] Indranil Pan, Saptarshi Das:“Fractional order fuzzy control of hybrid power system with renewable generation using chaotic PSO”,ISA Transactions 62 19-29,2016
- [27] Chun Yin, YangQuan Chen, Shou-ming Zhong:“Fractional-order sliding mode based extremum seeking control of a class of nonlinear system”,Automatica 50 3173-3181,2014
- [28] S.H.Hosseinnia, R.Ghaderi, A.Ranjbar N., M.Mahmoudian, S.Momani:“Sliding mode synchronization of an uncertain fractional order chaotic system”,Computers and Mathematics with Applications 59 1637-1643,2010
- [29] Guy Jumarie:“On the derivative chain-rules in fractional calculus via fractional difference and their application to systems modeling”,Central European Journal of Physics 11(6) 617-633,2013
- [30] Achraf NASSER EDDINE, Benoît HUARD,Jean-Denis GABANO, Thierry POINOT, Anthony THOMAS, Serguei MARTHMIANOV:“Time domain diffusion parameters identification of electrochemical impedance models using fractional order system”,IFAC PapersOnLine 51-15 377-382,2018
- [31] YangQuan Chen, Ivo Petráš and Dingyü Xue:“Fractional Order Control - A Tutorial”,2009 American Control Conference 1397-1411,2009
- [32] Elham Amini Boroujeni, Hamid Reza Momeni:“Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems”,Signal Processing 92 2365-2370,2012
- [33] Kai Chen, Rongnian Tang, Chuang Li, Pengna Wei:“Robust adaptive fractional-order observer for a class of fractional-order nonlinear systems with unknown parameters”,Nonlinear Dyn,2018
- [34] Firas Khemane, Rachid Malti, Tarek Raïssi, Xavier Moreau:“Robust estimation of fractional models in the frequency domain using set membership methods”,Signal Processing 92 1591-1601,2012
- [35] Qishui Zhong, Fuli Zhong, Jun Cheng, Hui Li, Shouming Zhong:“State of charge estimation of lithium-ion batteries using fractional order sliding mode observer”,ISA Transactions 66 448-459,2017

- [36] Jocelyn Sabatier, Mathieu Merveillaut Junior Mbala Francisco, Franck Guillemard:“Lithium-ion batteries modeling involving fractional differentiation”,Journal of Power Sources 262 36-43,2014
- [37] Yunfeng Jiang, Bing Xia, Xin Zhao, Truong Nguyen, Chris Mi, Raymond A.de Callafon:“Data-based fractional differential models for non-linear dynamic modeling of a lithium-ion battery”,Energy 135 171-181,2017
- [38] Isabel S.Jesus, J.A. Tenreiro Machado:“Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes”,Nonlinear Dyn 56 45-55,2009
- [39] Xiaoyu Li, Ke Pan, Guofong Fan, Rengui Lu, Chunbo Zhu, Giorgio Rizzoni, Marcello Canova:“A physics-based fractional order model and state of energy estimation for lithium ion batteries. Part II:Parameter identification and state of energy estimation for LiFePO₄ battery”,Journal of Power Sources 367 202-213,2017.
- [40] Fuli Zhong, Hui Li, Shouming Zhong, Qishui Zhong, Chun Yin:“An SOC estimation approach based on adaptive sliding mode observer and fractional order equivalent circuit model for lithium-ion batteries”,Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 24 127-144,2015.
- [41] Baojin Wang, Shengbo Eben Li, Huei Peng Zhiyuan Liu:“Fractional order modeling and parameter identification for lithium-ion batteries”,Journal of Power Sources 293 151-161,2015.
- [42] Renxin Xiao, Jiangwei Shen, Xiaoyu Li, Wensheng Yan, Endong Pan and Zheng Chen:“Comparisons of Modeling and State of Charge Estimation for Lithium-Ion Battery Based on Fractional Order and Integral Order Methods”,Energies 2016,9,184.
- [43] Daming Zhou, Ke Zhang, Alexandre Ravey, Fei Gao, and Abdellatif Miraoui:“Parameter Sensitivity Analysis for Fractional-Order Modeling of Lithium-Ion Batteries”,Energies 2016,9,123
- [44] Rui Xiong, Senior Member,IEEE, Jinpeng Tian, Student Member,IEEE, Weixiang Shen, Senior Member,IEEE, Fengchun Sun:“A novel fractional order model for state of charge estimation in lithium ion batteries”,IEEE, 2018
- [45] Baojin Wang, Zhiyuan Liu, Member IEEE, Shengbo Eben Li,Member,IEEE, Scott Jason Moura,Member IEEE and Huei Peng:“State-of-Charge Estimation for Lithium-Ion Batteries Based on a Nonlinear Fractional Model”,IEEE,2016

- [46] Jocelyn Sabatier, Junior Mbala Francisco, Franck Guillemard, Loic Lavigne, Mathieu Moze, Mathieu Merveillaut:“Lithium-ion batteries modeling:A simple fractional differentiation based model and its associated parameter estimation method”,Signal Processing 107 290 301,2015
- [47] Lei Zhang, Xiaosong Hu, Zhenpo Wang, Frngchun Sun, David G.Dorrell:“Fractional-order modeling and State-of-Charge estimation for ultracapacitors”,Journal of Power Sources 314 28-34,2016
- [48] Ruixin Yang, Rui Xiong, Hongwen He, Zeyu Chen:“A fractional-order model-based battery external short circuit fault diagnosis approach for all-climate electric vehicles application”,Journal of Cleaner Production 187 950-959,2018
- [49] Changfu Zou, Member,IEEE, Xiaosong Hu, Senior Member, IEEE, Satadru Dey, Member,IEEE, Lei Zhang, Member,IEEE,and Xiaolin Tang:“Nonlinear Fractional-Order Estimator With Guaranteed Robustness and Stability for Lithium-Ion Batteries”,IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.65,No.7 5951-5961,2018
- [50] Qi ZHANG, Naxin CUI, Yunlong SHANG, Guijing XING, and Chenghui ZHANG:“Relevance between fractional-order hybrid model and unified equivalent circuit model of electric vehicle power battery”,Science Chine Vol.61,2018
- [51] Pierre E.Jacob, Seyed Mohammad Mahdi Alavi, Adam Mahdi, Stephen J.Payne, and David A.Howey,Member,IEEE:“Bayesian Inference in Non-Markovian State-Space Models With Application to Battery Fractional-Order Systems”,IEEE Transactions on Control Systems Technology,Vol.26,No.2 497-506,2018
- [52] Sara Mohajer, Jocelyn Sabatier, Patrick Lanusse, Olivier Cois:“A Fractional-Order Electro-Thermal Aging Model for Lifetime Enhancement of Lithium-ion Batteries”,IFAC PapersOnLine 51-2 220-225,2018
- [53] Yuan Zou, Shengbo Eben Li, Bing Shao, Baojin Wang:“State-space model with non-integer order derivatives for lithium-ion battery”,Applied Energy 161 330-336,2016
- [54] Qingxia Yang, Jun Xu, Binggang Cao, Xiuqing Li:“A simplified fractional order impedance model and parameter identification method for lithium-ion batteris”,PLOS ONE,2017
- [55] Jinpeng Tian, Rui Xiong, Senior Member,IEEE, and Quanqing Yu, Student Member,IEEE:“Fractional order model based incremental capacity analysis for degradation state recognition of lithium-ion batteries”,IEEE Transactions on Industrial Electronics,2018

- [56] Hao Mu, Rui Xiong, Hongfei Zheng, Yuhua Chang, Zeyu Chen: “A novel fractional order model based state-of-charge estimation method for lithium-ion battery”, *Applied Energy*, 2017
- [57] Wen-Jing Shen et al, “Multi-Scale Parameter Identification of Lithium-Ion Battery Electric Models Using a PSO-LM Algorithm”, *MDPI*, pp.1–18, 2017
- [58] Carlos Pastor-Fernandez et al, “A Comparison between Electrochemical Impedance Spectroscopy and Incremental Capacity-Differential Voltage as Li-ion Diagnostic Techniques to Identify and Quantify the Effects of Degradation Modes within Battery Management Systems”, *Journal of Power Sources* 360, pp301–318, 2017
- [59] 斎藤 利通, “粒子群最適化と非線形システム”, 電子情報通信学会, 基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, Vol.5 No.2, pp155–161, 2011
- [60] 足立 修一, “システム同定の基礎”, 東京電機大学出版局, pp27–28, 2009
- [61] R. L. Bagley and P. J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, *J. of Rheology*, Vol. 27, pp. 201-210, 1983
- [62] M. Fukunaga, Application of fractional diffusion equation to amorphous semiconductors, In J. C. Trigeassou A. Le Mehaute, J. A. T. Mahado and J. Sabatier, editors, *Fractional Differentiation and its Applications*, pp. 389-400, Ubooks, 2005.
- [63] Ikuo Matsuba, *Statics for Long Memory Process- Theory and Method of Self-similar Time Series*, Kyoritsu Shuppan, Tokyo, 2007.
- [64] R. Garra and F. Polito, Fractional calculus modeling for unsteady unidirectional flow of incompressible fluids with time-dependent viscosity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17(12), pp. 5073-5078, 2012.
- [65] D. Matignon, Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing, *Comp. Eng. in S.A.*, 2, 963/968, 1996.
- [66] D. Matignon and B. d’Andrea-Novel, Decomposition modale fractionnaire de l’equation des ondes avec pertes viscothermiques, *Ecole Nationale Supérieure des Telecommunications*, 1995.
- [67] D. Matignon, et al, Some Results on Controllability and Observability of Finite-dimensional Fractional Differential Systems, *Comp. Eng. in S.A.*, 2, 952/956, 1996.
- [68] K. Nishimoto, *Fractional Calculus*, Descartes Press, 1984.

- [69] K.B. Oldham and J. Spanier: The Fractional Calculus, Academic Press, 1974.
- [70] K.S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [71] M. Caputo, Linear Model of Dissipation Whose Q is almost Frequency Independent - II, Geophys. J.R. Astr. Soc., 13, 529/539, 1967
- [72] M. Caputo and F. Mainardi, A New Dissipation Model Based on Memory Mechanism, Pure and Applied Geophysics, 91-8, 134/147, 1971.
- [73] A. Erdélyi, Higher Transcendental Functions, 3, McGraw Hill, New York, 1955.
- [74] M. Ivan, On Computation of Matrix Mittag-Leffler Function, arXiv preprint arXiv:1706.01538, 2017.
- [75] G. M. Mittag-Leffler, Sopra la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 137, 1903, pp. 554-616.
- [76] G. M. Mittag-Leffler, Sopra la funzione $E_\alpha(x)$, Rend. Acc. Lincei, ser. 5, vol. 13, 1904, pp. 3-5.
- [77] G. M. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, Acta Mathematica, Vol. 29, 1905, pp. 468-470.
- [78] A. Wiman, Über den fundamentalsatz in der theorie der funktionen $E_\alpha(x)$, Acta Math., vol.29, 1905, pp. 191-201.
- [79] A. Wiman, Über die nulstellen der funktionen $E_\alpha(x)$, Acta Math., vol.29, 1905, pp. 217-234.
- [80] A. V. Letnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, Mat. Sb., vol. 3, 1868, pp.1-68 (in Russian)
- [81] 細貝英実, 福田敏男. 自律形配管診断ロボットの研究: 第1報, 診断ロボットの設計・試作と走行・診断実験結果. 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 51, No. 467, pp. 1655-1662, 1985.
- [82] 高野政晴. 極限作業ロボットプロジェクト. 日本ロボット学会誌, Vol. 9, No. 5, pp. 614-618, 1991.
- [83] 大野英隆ほか. ヘビ型ロボットの研究動向. 湘南工科大学紀要, Vol. 38, No. 1, pp. 1-9, 2004.
- [84] 千葉工業大学. 階段やがれきのある災害現場で高い走行性能を発揮するレスキューロボット. Technical report, 2013.

- [85] 亀川哲志, 松野文俊. 遠隔操作性を考慮した双頭ヘビ型レスキューロボット kohga の開発. 日本ロボット学会誌, Vol. 25, No. 7, pp. 1074-1081, 2007.
- [86] Filippo San
lippo, Jon Azpiazu, Giancarlo Mara
oti, Aksel A Transeth, Pal Liljebäck, et al. Perception-driven obstacle-aided locomotion for snake robots: the state of theart, challenges and possibilities. Applied Sciences, Vol. 7, No. 4, p. 336, 2017.
- [87] Motoyasu Tanaka, Kazuo Tanaka, and Fumitoshi Matsuno. Approximate path-tracking control of snake robot joints with switching constraints. Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on, Vol. 20, No. 4, pp. 1633-1641, 2015.
- [88] Curtis P Mracek and James R Cloutier. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent riccati equation method. International Journal of robust and nonlinear control, Vol. 8, No. 4-5, pp. 401-433, 1998.
- [89] Shunsuke Nansai, Masami Iwase, Shoshiro Hatakeyama, and Mohan Rajesh Elara. Observer-based state estimation of snake-like robot with rotational elastic actuators, pp. 657-662, 2014.
- [90] Rose Simon, C Govardhana Reddy, and PS Lal Priya. Attitude control of reentry vehicles using adaptive sdre technique. In Industrial Technology (ICIT), 2017 IEEE International Conference on, pp. 743-748. IEEE, 2017.
- [91] Tayfun Ç imen. State-dependent riccati equation (sdre) control: A survey. In 17th IFAC World Congress (IFAC'08), Vol. 41, pp. 3761-3775. IFAC, 2008.
- [92] W Blajer. A geometrical interpretation and uniform matrix formulation of multibody system dynamics. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 81, No. 4, pp. 247-259, 2001.
- [93] Krzysztof Arczewski and Wojciech Blajer. A uni
ed approach to the modelling of holonomic and nonholonomic mechanical systems. mathematical modelling of systems, Vol. 2, No. 3, pp. 157-174, 1996.
- [94] Hiroshi Ohsaki, Masami Iwase, and Shoshiro Hatakeyama. A consideration of nonlinear system modeling using the projection method. In SICE, 2007 Annual Conference, pp. 1915-1920. IEEE, 2007.

- [95] Kouki Watanabe, Masami Iwase, Shoshiro Hatakeyama, and Takehiko Maruyama. Control strategy for a snake-like robot based on constraint force and verification by experiment. *Advanced Robotics*, Vol. 23, No. 7-8, pp. 907-937, 2009.
- [96] Ken Tashiro, Syunsuke Nansai, Masami Iwase, and Shoshiro Hatakeyama. Development of snake-like robot climbing up slope in consideration of constraint force. In *IECON 2012-38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 5422-5427. IEEE, 2012.
- [97] Ichiro Awaya. Control of vibration systems with friction. *Journal of the Robotics Society of Japan*, Vol. 13, No. 8, pp. 1078-1083, 1995.
- [98] Robbin van Hoek, Mohsen Alirezaei, Antoine Schmeitz, and Henk Nijmeijer. Vehicle state estimation using a state dependent riccati equation. *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 50, No. 1, pp. 3388-3393, 2017.
- [99] Masanobu Koga. Matx/rtmatrix: a freeware for integrated cacs. In *Computer Aided Control System Design, 1999. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on*, p. DOI:10.1109/CACSD.1999.808690. IEEE, 1999.
- [100] Iwase Masami, Kojima Shingo, Sadahiro Teruyosh, and Hatakeyama Shoshiro. Setting-up matx - based laboratory experimental systems - a pendulum system with windows os. In *8th IFAC Symposium on Advances in Control Education*, pp. DOI:<https://doi.org/10.3182/20091021-3-JP-2009.00040>. IFAC, 2010.

謝 辞

本研究を進めるにあたり、多くの方々にお世話になりました。この場を借りて感謝の意を述べさせていただきます。

指導教員である岩瀬将美教授(東京電機大学大学院先端科学技術研究科先端技術創成専攻)には、研究に関する意義深い提案や適切な指導、自分が研究で悩んでいた、滞っていた時には親身になって相談していただきました。また先生のご紹介により自分の進路の幅を広くすることができました。同専攻の畠山省四朗教授には、自分が研究室を異動した後も、意義深い提案や興味深い考え、自分の研究に対する哲学の考え方など多くのことを学ばせていただきました。井筒正義氏(株式会社富士通研究所)には研究に行き詰った際に、多くの斬新な提案や的確な助言および指導をして頂き、幾度となく助けていただきました。井筒氏の研究に対する広い視野を持った考え方や学生指導に対する考えや対応方法には大変学ぶことが多く、研究生活の中で非常に多くのことを体験することができました。そして岩瀬先生、畠山先生、井筒先生方には学部4年から博士3年までの6年間で、研究だけでなく非常に多くのことを学ばせていただき、心から御礼申し上げます。

古田勝久名誉教授には、本研究の礎となるような提案やご指導を賜りました。本当にありがとうございました。

株式会社エヌエフ回路設計ブロック 代表取締役社長をはじめとした皆様には、研究対象であったリチウムイオン電池に関して、多くのご助力を賜りました。ありがとうございました。

副手業務の際に大変お世話になり生活面や進学に関して多くの助言を頂いた元未来科学部ロボット・メカトロニクス学科深澤講師および補助職員の進藤様に深く感謝いたします。

同研究室および畠山研究室所属の多くの方々には研究面だけではなく、生活面でも多くの手助けをしていただきました。皆さんの手助けや声が無ければ自分はここまでやれていなかったと思います。本当にありがとうございました。

以上の本学に関する方々の助言・協力・指導・激励に対し、改めて深く感謝申し上げます。

そして、Singapore University of Technology and Design の Assistant Professor である Mohan Rajesh Elara 先生には自分を引き受けていただいたこと、そして留学中に非常に多くのことを学ばせていただいたことに心より御礼申し上げます。また、同大学のスタッフの方々には滞在中にとってもよくしていただきましたことを感謝します。

最後となりましたが、学部生から博士課程までの9年間の大学生活とその間のシンガポールへの留学を何も言わずに支え、応援してくれた家族に心から感謝いたします。