東 京 電 機 大 学

# 博 士 論 文

(論文題目)

いくつかのウィンドウの無限族に関する離散トモグラフィー

(論文題目 (英文))

Discrete tomography for some infinite families of windows

平成 31 年 3 月 18 日

学籍番号：16UDR01

矢城　東

指導教員：硲 文夫 教授

## 1　はじめに

いわゆるトモグラフィーは, 三次元の物体を二次元の断面の情報から再構成する手法を指すが, 離散トモグラフィーとは, ウィンドウとよばれる $\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合 $\mathbf{w}$ を固定したとき, $f_{\mathbf{w}+p} = \sum_{x\in\mathbf{w}+p} f(x),\ \ (p \in \mathbb{Z}^n)$ の情報から関数 $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ を再構成する方法を研究する分野である.

従って, $(\Delta_{\mathbf{w}} f)(p) = \sum_{x\in\mathbf{w}+p} f(x)$ によって定義される線形写像 $\Delta_{\mathbf{w}}$ の核（$\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}}$ と表す）を定めることが重要な課題となる. この問題が $\mathbf{w}$ に付随する自然な $n$ 変数多項式の $\mathbb{T}^n$ での零点の分布によって完全に記述されることが, 硲によって証明されている.[2]

多くの文献 (例えば [5] を参照) がこの問題に関連した研究に当てられ, 特に,Nivat は [6, 7] で, 局所的な情報が与えられているとき, 離散トモグラフィーの問題と関連付けて, 行列を再構成する問題を研究をしている.

これらの問題に触発され, 硲が [2, 3, 4] で一般的な定理 (後述の定理 2.1) を定式化し, ウィンドウ $\mathbf{w}$ に付随する特定のローラン多項式の零点から, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}}$ を決定することを可能にした.

一方で, Gündüz は [1] で, 任意のメロディー $\mathbf{s}$(= 有限な整数列) に, $\mathbb{Z}^2$ の点の有限順序集合 $\mathbf{M}(\mathbf{s})$ を結びつけるアルゴリズムを提案しており, そのアルゴリズムを利用することにより, いくつかの民謡の間の類似点を考察している.

この論文では, 2 種類のウィンドウの無限族に関する離散トモグラフィーについて考察する.

1 つ目は, 2 以上の整数 $n$ に対して, 数列 $\mathbf{s}(n) = (0, 1, n)$ の隣接 2 項から作られる点列 $\mathbf{M}(\mathbf{s}(n)) = \{(0, 1), (1, n), (n, 0)\}$ をウィンドウとする場合であり, これについては第 3 章で述べる. 2 つ目は, 横幅が $n$ の $L$ 字型ウィンドウ $\mathbf{w}_n = \{(0, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 0), \cdots, (n-1, 0)\}$ であり, これは第 4 章で述べる.

以下, 各章の概要を述べる.

第 2 章では, 結果を明確に述べるために必要な概念と記号を導入し, 基本定理の定式化を行う.

第 3 章では, 自身が [8] で得た結果を一般の $n$ の場合に拡張する. 特に, $n \equiv 0, 1 \pmod 3$ の場合に, 条件”$n^2 - n + 1 = p$ ($p$:素数)”を付け加えることで, 1 の累乗根で与えられる特性多項式の解から作られるアレイが, すべて零和アレイの条件を

満たしていることを完全に証明する. さらに, 有理化された零和アレイの $x$ 軸上に見える元の 1 周期から作られる巡回行列を行基本変形することで得られる,$0, \pm 1$ のみで表された行列の行の並びからアレイを再構成するとき, どの行からアレイを再構成しても, すべてのアレイが零和アレイになることを証明する.

第 4 章では, $L$ 字型ウィンドウ $\mathbf{w}_n$ に付随する $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}$ の構造を, $n \equiv 0 \pmod 2$ と $n \equiv 1 \pmod 2$ の場合に分けて考察する. さらに, 論文 [9] で私が主に貢献した, 行列 $M$ を行基本変形する為の補題と, $n \equiv 1 \pmod 2$ のときの $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}$ の部分空間のさらなる場合分けの方法と結果を述べる.

## 2　準備

$\mathbb{Z}^2$ 上の複素関数の集合を $\mathbf{A} = (\mathbf{C})^{\mathbb{Z}^2}$ とする．その元の値を $\mathbf{a} = (\mathbf{a_i})$ と表し，このとき, $\mathbf{i} = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$ であり， $\mathbf{a_i} \in \mathbf{C}$ となる．この $\mathbf{A}$ の元のことをアレイ (array) という．また, このアレイの集合 $\mathbf{A}$ には, 複素ベクトル空間の自然な構造が与えられる．

任意のアレイ $\mathbf{a} = (\mathbf{a_i})$ に対して, $\mathrm{supp}\ \mathbf{a} = \{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2; \mathbf{a_i} \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^2$ を $\mathbf{a}$ のサポートとよぶ． そして, 有限なサポートを持つアレイのことをウィンドウ (window) といい, このウィンドウの集合を $\mathbf{W}$ と表す．任意のウィンドウ $\mathbf{w} = (\mathbf{w_i})$ と任意のアレイ $\mathbf{a} = (\mathbf{a_i})$ に対し, ウィンドウで覗いたアレイの値の和を $d_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = \Sigma_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{w_i} \mathbf{a_i}$ と定義する．また, 任意の $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ に対し, ウィンドウの平行移動 $\mathbf{w} + \mathbf{p}$ を, $(\mathbf{w} + \mathbf{p})_{\mathbf{i}} = \mathbf{w_{i-p}}, \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2$ で定義する．

この論文のメインとなる対象は,

$$\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}} = \{\mathbf{a} \text{ は有界かつ任意の } \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 \text{に対して } d_{\mathbf{w}+\mathbf{p}}(\mathbf{a}) = 0\}, \tag{2.1}$$

であり, この空間 $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}}$ の元を $\mathbf{w}$ に関する零和アレイと呼ぶ.

以下の様な $\mathbf{w}$ の特性多項式 $m_{\mathbf{w}}$ は,$\mathbf{w}$ に付随する零和アレイを得る上で重要である．

**Definition 2.1** 任意のウィンドウ $\mathbf{w}$ に対し, その特性多項式 $m_{\mathbf{w}}$ を以下のように定義する：

$$m_{\mathbf{w}} = \sum_{(i,j) \in \mathrm{supp}\ \mathbf{w}} \mathbf{w}_{(i,j)} x^i y^j. \tag{2.2}$$

また, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ とし, $\mathbb{T}^2$ の自己同型写像 $\iota : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ を $\iota(z_1, z_2) = (z_1^{-1}, z_2^{-1})$ と定義する．ここで, $m^*_{\mathbf{w}} = \iota^*(m_{\mathbf{w}})$ と置くことで, $m^*_{\mathbf{w}}(z) = m_{\mathbf{w}}(\iota(z))$ となる．任意の部分集合 $X \subset \mathbf{C}^2$ に対し, $V_X(m_{\mathbf{w}}) = \{z \in X; m_{\mathbf{w}}(z) = 0\}$ と表す．離散トモグラフィーに関する基本的な以下の 2 つの定理が, 本論文でも重要な役割を果たす:

**Theorem 2.1** $[1, Theorem\, 3.1]$ $V_{\mathbb{T}^2}(m^*_{\mathbf{w}})$ を有限部分集合とする．このとき, 以下の式を得る：

$$dim_{\mathbb{C}}\, \mathbf{A}^0_{\mathbf{w}} = \#(V_{\mathbb{T}^2}(m^*_{\mathbf{w}})). \tag{2.3}$$

さらに, $V_{\mathbb{T}^2}(m^*_{\mathbf{w}})$ が無限のとき, 空間 $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}}$ も無限次元となる.

また, 以下の様に, 零和アレイと $V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}})$ の元を関連付けることができる.

**Theorem 2.2** $[2,3](x_0, y_0) \in V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}})$ とし, $\mathbf{a}(x_0, y_0)$ を以下の様なアレイとして定義する：

$$\mathbf{a}(x_0, y_0) = \left(\mathbf{a}_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2},\ \mathbf{a}_{(i,j)} = (x_0^i y_0^j)^{-1}. \tag{2.4}$$

このとき, $\mathbf{a}(x_0, y_0) \in \mathbf{A}^0_{\mathbf{w}}$ である.

さらに, 第 3 章は論文 [1] にヒントを得て, 次の定義に関連した離散トモグラフィーを考察する.

**Definition 2.2** 　与えられた整数列 $\mathbf{s}(n) = (s_0, s_1, \cdots, s_n)$ に関連付けて, 点列 $\mathbf{M}(\mathbf{s}(\mathbf{n}))$ を以下の様に定義する：

$$\mathbf{s}(n) = (s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n) \mapsto \mathbf{M}(\mathbf{s}(n)) = ((s_0, s_1), (s_1, s_2), \cdots, (s_{n-1}, s_n), (s_n, s_0)) \tag{2.5}$$

# 3　整数列 $(0,1,n)$ の離散トモグラフィー

この章では, 数列 $\mathbf{s}(n)=(0,1,n)$ の隣接 2 項から点列を作り, その点列をウィンドウ $\mathbf{w}(n)$ とした場合の零和アレイ $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(n)}$ を求める．特に, $n \equiv 0,1 \pmod 3$ と $n \equiv 2 \pmod 3$ の場合では, 解を得るために異なるアプローチを行う必要があり, それぞれの場合について考察する.

数列 $\mathbf{s}(n)$ を $\mathbf{s}(n)=(0,1,n)$ とおき, $\mathbf{w}(n)$ を部分集合

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}(n))=\{(0,1),(1,n),(n,0)\}\subset\mathbb{Z}^2 \tag{3.1}$$

の特性関数とする．このウィンドウ $\mathbf{w}(n)$ について, その零和アレイを考察する. 特性多項式 $m_{\mathbf{w}(n)}$ は次の様になる:

$$m_{\mathbf{w}(n)}=y+xy^n+x^n. \tag{3.2}$$

よって, $m^*_{\mathbf{w}(n)}$ は,

$$m^*_{\mathbf{w}(n)}=\frac{1}{y}+\frac{1}{xy^n}+\frac{1}{x^n}, \tag{3.3}$$

となる. ここで, $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ に対して, $m_{\mathbf{w}(n)}(x,y)=0$ とおくと, $\overline{m_{\mathbf{w}(n)}(x,y)}=0$ となることから, $m^*_{\mathbf{w}(n)}(x,y)=0$ を得ることができる. このことから, 次の連立方程式を得る.

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{w}(n)} &= 0, && (3.4)\\ m^*_{\mathbf{w}(n)} &= 0. && (3.5)\end{aligned}$$

(3.4) から $xy^{n+1}m^*_{\mathbf{w}(n)}=0$ を引くと,

$$x^n-\frac{y^{n+1}}{x^{n-1}}=0,$$

となり, これを整理すると次の式を得る:

$$x^{2n-1}=y^{n+1}. \tag{3.6}$$

ここで, $x,y$ の指数である $2n-1$, $n+1$ の最大公約数は以下の様に計算ができる:

$$\begin{aligned} GCD(2n-1,n+1) &= GCD((2n-1)-(n+1),n+1)\\ &= GCD(n-2,n+1)\\ &= GCD((n+1)-(n-2),n+1)\\ &= GCD(3,n+1).\end{aligned}$$

よって, 特性多項式の解に関して以下の場合分けができる:

$$\begin{cases} GCD(2n-1, n+1) = 1 & n \equiv 0, 1 (mod\, 3) \text{ のとき}, \\ GCD(2n-1, n+1) = 3 & n \equiv 2 (mod\, 3) \text{ のとき}. \end{cases} \tag{3.7}$$

そこで, $n \equiv 0, 1 \pmod 3$ と $n \equiv 2 \pmod 3$ の場合分けを行って, 議論を進める.

### 3.1 $n \equiv 0, 1 \pmod 3$ かつ $N = p$ ($p$ : 素数) の場合

この節では, $n \equiv 0, 1 (mod\, 3)$ かつ $N = n^2 - n + 1$ が素数の場合について考える. この場合, (3.7) より $GCD(2n-1, n+1) = 1$ であるから, (3.6) より, $x, y$ はパラメータ $t$ を用いて, 以下の様に表せる:

$$x = t^{n+1}, y = t^{2n-1}. \tag{3.8}$$

この $x, y$ を $m_{\mathbf{w}(n)} = 0$ に代入すると,(3.2) より

$$t^{2n-1} + t^{n+1}\left(t^{2n-1}\right)^n + \left(t^{n+1}\right)^n = 0,$$

となり, これを整理すれば次の式を得る:

$$t^{2n-1} + t^{2n^2+1} + t^{n^2+n} = 0. \tag{3.9}$$

さらに, この (3.9) の両辺に $(t^{2n-1})^{-1}$ を掛けることにより,

$$t^{2(n^2-n+1)} + t^{n^2-n+1} + 1 = 0, \tag{3.10}$$

となる. 従って, 以下の式を得る:

$$t^{2N} + t^N + 1 = 0.$$

この解は, $t^N = \omega$ もしくは, $t^N = \omega^2$ であることから, $t$ の値は以下の様に表すことができる:

$$t = \zeta_{3N}^k \ (1 \leq k \leq 3N-1,\ 3 \not| k). \tag{3.11}$$

ここで, 1 の原始 $m$ 乗根を $\zeta_m$ と表し, $\omega = \zeta_3$ とする.

以上より, 次の命題を得ることができた.

**Proposition 3.1** $n \equiv 0, 1 (mod\, 3)$ のとき, 特性多項式 $m_{\mathbf{w}(n)}$ の $\mathbb{T}^2$ における零点は次の様になる：

$$V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}(n)}) = \{(\zeta_{3N}^{k(n+1)}, \zeta_{3N}^{k(2n-1)}); 1 \leq k \leq 3N-1,\ 3 \not| k)\}. \tag{3.12}$$

特に,

$$\#(V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}(n)})) = 2N \tag{3.13}$$

である.

この解を用いて零和アレイを作る為に, 準備を行う. 解の条件に注目すると, $k = N, 2N$ のとき, 解は

$$\begin{cases} k = N \text{ のとき} & (x_0, y_0) = (\zeta_3^{n+1}, \zeta_3^{2n-1}), \\ k = 2N \text{ のとき} & (x_0, y_0) = (\zeta_3^{2(n+1)}, \zeta_3^{2(2n-1)}). \end{cases} \tag{3.14}$$

となる. よって, 条件である $n \equiv 0, 1 \pmod 3$ それぞれに対応する $k = N, 2N$ のときの解は次の様に定まる:

$$k = N \text{ のとき} \begin{cases} (x_0, y_0) = (\zeta_3^1, \zeta_3^2) & n \equiv 0 \pmod 3, \\ (x_0, y_0) = (\zeta_3^2, \zeta_3^1) & n \equiv 1 \pmod 3. \end{cases} \tag{3.15}$$

$$k = 2N \text{ のとき} \begin{cases} (x_0, y_0) = (\zeta_3^2, \zeta_3^1) & n \equiv 0 \pmod 3, \\ (x_0, y_0) = (\zeta_3^1, \zeta_3^2) & n \equiv 1 \pmod 3. \end{cases} \tag{3.16}$$

ここで, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(n)}$ の部分空間 $V_1, V_2$ を次の様に定義する:

$$\begin{cases} V_1 =< \mathbf{a}(\zeta_{3N}^{k(n+1)}, \zeta_{3N}^{k(2n-1)}); k = N, 2N >_{\mathbb{C}}, \\ V_2 =< \mathbf{a}(\zeta_{3N}^{k(n+1)}, \zeta_{3N}^{k(2n-1)}); 1 \leq k \leq 3N-1, GCD(k, 3N) = 1 >_{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

これを書き直すと, 次の様になる:

$$\begin{cases} V_1 =< \mathbf{a}(\omega, \omega^2), \mathbf{a}(\omega^2, \omega) >_{\mathbb{C}}, \\ V_2 =< \mathbf{a}(\zeta_{3N}^{k(n+1)}, \zeta_{3N}^{k(2n-1)}); 1 \leq k \leq 3N-1, GCD(k, 3N) = 1 >_{\mathbb{C}}. \end{cases} \tag{3.17}$$

このとき, 定理 2.1 より, 特性多項式の解の個数と, 複素線形部分空間 $V_1, V_2$ の次元は一致するので,

$$dim_{\mathbb{C}} V_1 = 2, \tag{3.18}$$

$$dim_{\mathbb{C}} V_2 = 2(N-1). \tag{3.19}$$

となる.

ここでアレイの例として, $\mathbf{a}(\omega, \omega^2) \in V_1$ を挙げると, 次の様になる.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 \\
1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 \\
\omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega \\
\omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 \\
1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 \\
\omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega \\
\omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 \\
1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2
\end{array}
$$

Fig 1: $\mathbf{a}(\omega, \omega^2)$

このアレイの座標 $(i, j)$ での値は,(2.4) より $\mathbf{a}_{(i,j)} = (\omega^i \cdot \omega^{2j})^{-1} = (\omega^{i+2j})^{-1}$ で求められる. よって, $\mathbf{w}(n) = \{(0,1), (1,n), (n,0)\}$ で覗くとき, 覗いた部分の和を求めると,

$$(\omega^{0+2})^{-1} + (\omega^{1+2n})^{-1} + (\omega^{n+0})^{-1} = (\omega^2)^{-1} + (\omega^{2n+1})^{-1} + (\omega^n)^{-1} \tag{3.20}$$

となり, $n$ の条件より場合分けを行うと, 次の様に値が定まる:

$$n \equiv 0 \pmod 3 \text{ のとき} \quad \omega + \omega^2 + 1 = 0, \tag{3.21}$$

$$n \equiv 1 \pmod 3 \text{ のとき} \quad \omega + 1 + \omega^2 = 0. \tag{3.22}$$

また, $\mathbf{a}(\omega^2, \omega)$ についても同様の計算ができるので, $V_1$ に属する全てのアレイが $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(n)}$ に属することが確かめられた.

次に, $V_2$ に属するアレイについて, $V_1$ と同様の事を考えると, アレイの値は

$$\mathbf{a}_{(i,j)} = (\zeta_{3N}^{k\{(n+1)i+(2n-1)j\}})^{-1} \tag{3.23}$$

である.

従って,

$$\begin{aligned} -k(2n^2+1)+k(2n-1) &= -k(2n^2-2n+2) \\ &= -2Nk, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -k(n^2+n)+k(2n-1) &= -k(n^2-n+1) \\ &= -Nk, \end{aligned}$$

であることに注意すれば, ウィンドウで覗いた部分の和は次の様になる:

$$\begin{aligned} (\zeta_{3N}^{k(2n-1)})^{-1}+(\zeta_{3N}^{k(2n^2+1)})^{-1}+(\zeta_{3N}^{k(n^2+n)})^{-1} &= \zeta_{3N}^{-k(2n-1)}(1+\zeta_{3N}^{-2Nk}+\zeta_{3N}^{-Nk}) \\ &= \zeta_{3N}^{-k(2n-1)}(1+\omega^{-2k}+\omega^{-k}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

よって, $V_2$ に属する全てのアレイが $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(n)}$ に属することが確かめられた.

次に, この $V_1, V_2$ に属するアレイの値は 1 の累乗根で表されているので, 有理化をする方法として, 次の $S_1, S_2$ を定義する:

$$\begin{cases} S_1 & = \mathbf{a}(\omega,\omega^2)+\mathbf{a}(\omega^2,\omega) \in V_1, \\ S_2 & = \sum_{\substack{k=1 \\ 3\nmid k, N\nmid k}}^{3N-1} \mathbf{a}(\zeta_{3N}^{k(n+1)}, \zeta_{3N}^{k(2n-1)}) \in V_2. \end{cases} \tag{3.25}$$

このとき, $S_1, S_2$ は $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{3N}/\mathbb{Q}))$ の作用で不変だから, アレイの値はすべて有理数である.

具体的に, $S_2$ の $x$ 軸上での値を得る為に, $S_2$ を構成するアレイ $\mathbf{a}(\zeta_{3N}^{k(n+1)}, \zeta_{3N}^{k(2n-1)})$ を $\mathbf{a}^k$ とおく. すると定義によって

$$\mathbf{a}^k_{(i,0)} = \zeta_{3N}^{-k(n+1)i} \tag{3.26}$$

である. ここで $3N$ を法として $i$ の場合分けを考えると, アレイの値は次の様になる:

$$\mathbf{a}^k_{(i,0)} = \begin{cases} (\zeta_{3N}^0)^k = 1^k = 1, & i \equiv 0 \ (mod\ 3N), \\ (\zeta_N^{-(n+1)f})^k, & i \equiv 3f \ (mod\ 3N)(1 \leq f \leq N-1), \\ (\zeta_3^{-(n+1)g})^k, & i \equiv Ng \ (mod\ 3N)(g=1,2), \\ (\zeta_{3N}^{-(n+1)h})^k, & i \equiv h \ (mod\ 3N)(3 \nmid h, N \nmid h). \end{cases} \tag{3.27}$$

ここで, $f, g, h$ はそれぞれ $GCD(f,N)=1,\ GCD(g,3)=1,\ GCD(h,3N)=1$ であり, さらに

$$\begin{aligned} GCD(n+1,N) &= GCD(n+1,n^2-n+1) \\ &= GCD(n+1,n^2-n+1-(n-2)(n+1)) \\ &= GCD(n+1,3) \\ &= 1, \end{aligned}$$

であることから, $\zeta_N^{-(n+1)f}, \zeta_3^{-(n+1)g}, \zeta_{3N}^{-(n+1)h}$ はそれぞれ 1 の原始 $N$ 乗根, 3 乗根, $3N$ 乗根であるであることに注意して, 和 $S_2$ を計算し, 次の命題を得る:

**Proposition 3.2**

$$(S_2)_{(i,0)} = \sum_{\substack{k=1 \\ 3\nmid k, N\nmid k}}^{3N-1} \mathbf{a}_{(i,0)}^k = \begin{cases} 2(N-1), & i \equiv 0\ (mod\ 3N), \\ -2, & i \equiv 3f\ (mod\ 3N)(1 \le f \le N-1), \\ -(N-1), & i \equiv Ng\ (mod\ 3N)(g=1,2), \\ 1, & i \equiv h\ (mod\ 3N)(3 \nmid h, N \nmid h). \end{cases} \tag{3.28}$$

Proof: まず, $i \equiv 0 \pmod{3N}$ のときは,

$$(S_2)_{(i,0)} = \sum_{\substack{k=1 \\ 3\nmid k, N\nmid k}}^{3N-1} 1 = 2(N-1), \tag{3.29}$$

である.

次に, $i \equiv 3f\ (mod\ 3N)(1 \le f \le N-1)$ のときの $S_2$ の値を求める. 式 $\sum_{k=0}^{3N-1} \zeta_N^k$ は

$$\sum_{k=0}^{3N-1} \zeta_N^k = \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^k + \zeta_N^N \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^k + \zeta_N^{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^k, \tag{3.30}$$

と表すことができ, 一般に $\sum_{l=0}^{p-1} \zeta_p^l = 0$ ($p$ : 素数) となることから, $\sum_{k=0}^{3N-1} \zeta_N^k = 0$ であり, 次の式が得られる:

$$\sum_{k=1}^{3N-1} \zeta_N^k = -1. \tag{3.31}$$

また, $GCD(3,N)=1$ より,

$$\begin{aligned} \zeta_N^0 + \zeta_N^3 + \zeta_N^6 + \cdots + \zeta_N^{3(N-1)} &= 0, \\ \zeta_N^3 + \zeta_N^6 + \cdots + \zeta_N^{3(N-1)} &= -1, \end{aligned} \tag{3.32}$$

である. ここで, 任意の整数 $m$ に対して $\zeta_p^{mp}=1$ となることから,

$$\zeta_N^N+\zeta_N^{2N}=2. \tag{3.33}$$

であり, 以上のことから, $\sum_{k=0}^{3N-1}\zeta_N^k$ は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3N-1}\zeta_N^k &= \zeta_N^0+\sum_{\substack{k=1\\ 3\nmid k,N\nmid k}}^{3N-1}\zeta_N^k+(\zeta_N^3+\zeta_N^6+\cdots+\zeta_N^{3(N-1)})+(\zeta_N^N+\zeta_N^{2N})\\ &= 1+\sum_{\substack{k=1\\ 3\nmid k,N\nmid k}}^{3N-1}\zeta_N^k-1+2\\ &= 0,\end{aligned}$$

と分解できることから,

$$(S_2)_{(i,0)}=\sum_{\substack{k=1\\ 3\nmid k,N\nmid k}}^{3N-1}\zeta_N^k=-2, \tag{3.34}$$

と定まる.

次に, $i\equiv Ng\ (mod\ 3N)(g=1,2)$ のときの値を求める. まず, (3.31) と同様に, $\sum_{k=0}^{3N-1}\zeta_3^k=0$ となるので,

$$\sum_{k=1}^{3N-1}\zeta_3^k=-1, \tag{3.35}$$

を得る. そして, 任意の整数 $m$ に対して $\zeta_p^{mp}=1$ となることから,

$$\zeta_3^3+\zeta_3^6+\cdots+\zeta_3^{3(N-1)}=N-1, \tag{3.36}$$

となり, $GCD(3,N)=1$ より, 次の式を得ることができる:

$$\zeta_3^N+\zeta_3^{2N}=-1. \tag{3.37}$$

以上より, $\sum_{\substack{k=1\\ 3\nmid k,N\nmid k}}^{3N-1}\zeta_3^k$ は,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3N-1}\zeta_3^k &= \zeta_N^0+\sum_{\substack{k=1\\ 3\nmid k,N\nmid k}}^{3N-1}\zeta_3^k+(\zeta_3^3+\zeta_3^6+\cdots+\zeta_3^{3(N-1)})+(\zeta_3^N+\zeta_3^{2N})\\ &= 1+\sum_{\substack{k=1\\ 3\nmid k,N\nmid k}}^{3N-1}\zeta_3^k+(N-1)-1\\ &= 0,\end{aligned}$$

より, 以下の様に定まる:

$$(S_2)_{(i,0)} = \sum_{\substack{k=1 \\ 3\nmid k, N\nmid k}}^{3N-1} \zeta_3^k = -(N-1). \tag{3.38}$$

そして, $i \equiv h\ (mod\ 3N)(3 \nmid h, N \nmid h)$ のときの値について, $\sum_{k=0}^{3N-1} \zeta_{3N}^k = 0$ より,

$$\sum_{k=1}^{3N-1} \zeta_{3N}^k = -1, \tag{3.39}$$

であり,

$$\begin{aligned} \zeta_{3N}^3 + \zeta_{3N}^6 + \cdots + \zeta_{3N}^{3(N-1)} &= -1, & (3.40) \\ \zeta_{3N}^N + \zeta_{3N}^{2N} &= -1, & (3.41) \end{aligned}$$

となることから, $\sum_{\substack{k=1 \\ 3\nmid k, N\nmid k}}^{3N-1} \zeta_{3N}^k$ の値は,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ 3\nmid k, N\nmid k}}^{3N-1} \zeta_{3N}^k &= \sum_{k=1}^{3N-1} \zeta_{3N}^k - (\zeta_{3N}^3 + \zeta_{3N}^6 + \cdots + \zeta_{3N}^{3(N-1)}) - (\zeta_{3N}^N + \zeta_{3N}^{2N}) \\ &= -1 - (-1) - (-1) & (3.42) \\ &= 1. \end{aligned}$$

と計算ができるので,

$$(S_2)_{(i,0)} = \sum_{\substack{k=1 \\ 3\nmid k, N\nmid k}}^{3N-1} \zeta_{3N}^k = 1, \tag{3.43}$$

を得る. これで命題 3.2 の証明が完成した.□

この命題より, $S_2$ の $x$ 軸上の値 $(S_2)_{(i,0)}$ は, 周期 $3N$ を持ち, $i=0$ のときからの並びを $v^0$ とすると

$$\begin{aligned} v^0 = (2(N-1), 1, 1, -2, 1, 1, -2, \cdots, -2, -(N-1), 1, \cdots, \\ \cdots, 1, -(N-1), -2, \cdots, -2, 1, 1). \end{aligned} \tag{3.44}$$

と表せる. この $v^0$ を右に 1 つずつ巡回させたベクトルを $v^k = (v_{i-k}^0)_{i=0,\cdots,3N-1}$ $(1 \le k \le 3N-1,$ 添字 $i-k$ は $mod\ 3N$ で考える$)$ と定義し, $v^k$ を第 $(k+1)$ 行に

もつ, $3N \times 3N$ 行列を $M$ とする. 以下 $M$ のランクを求める. この $v^0$ の要素の並びを

$$v^0 = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{3N-1}), \tag{3.45}$$

とおくとき, 行列 $M$ は以下の様な巡回行列となり,

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{3N-2} & a_{3N-1} \\ a_{3N-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{3N-3} & a_{3N-2} \\ a_{3N-2} & a_{3N-1} & a_0 & \cdots & a_{3N-4} & a_{3N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{3N-1} & a_0 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

次の命題を得る:

**Proposition 3.3** $\chi^j(i) = \zeta_{3N}^{ij}$ $(0 \leq i, j \leq 3N-1)$ とおくとき,$X^j = \sum_{i=0}^{3N-1} a_i \chi^j(i)$ の値は, $j$ $(0 \leq j \leq 3N-1)$ の値の場合分けを考えることにより, 以下の様に得られる :

$$X^j = \begin{cases} 0 & j = 0, \\ 0 & j = 3f' \ (1 \leq f' \leq N-1), \\ 0 & j = Ng' \ (g' = 1, 2), \\ 3N & j = h' \ (1 \leq h' \leq 3N-1, \ 3 \not| h', \ N \not| h'). \end{cases} \tag{3.47}$$

特に, $\#\{X^j \neq 0, \ 0 \leq j \leq 3N-1\} = 2(N-1)$ であり, 行列 $M$ のランクは,

$$rank \ M = 2(N-1) \tag{3.48}$$

となる.

Proof: $\chi^j(i)$ と $v^0$ の並びを用いて, 次の式を定義する:

$$X^j = \sum_{i=0}^{3N-1} a_i \chi^j(i). \tag{3.49}$$

すると, 巡回行列の性質により, この行列 $M$ のランクは以下の様に定まる:

$$rank \ M = \#\{X^j \neq 0, \ 0 \leq j \leq 3N-1\}. \tag{3.50}$$

以下, $X^j$ の値を個別に計算する. まず, $a_i(0 \leq i \leq 3N-1)$ の値は, (3.44) の $S_2$ の $x$ 軸上の値より, 以下の様に定まる:

$$a_i = \begin{cases} 2(N-1), & i = 0, \\ -2, & i = 3f \ (1 \leq f \leq N-1), \\ -(N-1), & i = Ng \ (g = 1, 2), \\ 1, & i = h \ (1 \leq h \leq 3N-1, \ 3 \nmid h, N \nmid h). \end{cases} \tag{3.51}$$

次に, $j$ に注目して場合分けを考える.

まず, $j = 0$ の場合について, $\chi^0(i) = \zeta_{3N}^{i \cdot 0} = 1$ と (3.51) を用いて $X^0$ の値を求める. $i = 0$ のとき, $a_0\chi^0(0) = 2(N-1) \cdot 1 = 2(N-1)$. また, $i = 3f \ (1 \leq f \leq N-1)$ のとき, $a_{3f}\chi^0(3f) = (-2) \cdot 1 = -2$. 次に, $i = Ng \ (g = 1, 2)$ のとき, $a_{Ng}\chi^0(Ng) = -(N-1) \cdot 1 = -(N-1)$. さらに, $i = h \ (1 \leq h \leq 3N-1, \ GCD(h, 3N) = 1)$ のとき, $a_h\chi^0(h) = 1 \cdot 1 = 1$ となる. 以上のことをまとめると,

$$a_i\chi^0(i) = \begin{cases} 2(N-1), & i = 0 \\ -2, & i = 3f \ (1 \leq f \leq N-1) \\ -(N-1), & i = Ng \ (g = 1, 2) \\ 1, & i = h \ (1 \leq h \leq 3N-1, \ 3 \nmid h, N \nmid h) \end{cases} \tag{3.52}$$

となる. ここで, $X^j$ を整理すると,

$$X^j = a_0\chi^j(0) + \sum_{\substack{i=3f \\ 1 \leq f \leq N-1}} a_i\chi^j(i) + \sum_{\substack{i=Ng \\ g=1,2}} a_i\chi^j(i) + \sum_{\substack{i=h \\ 3 \nmid h, N \nmid h}} a_i\chi^j(i) \tag{3.53}$$

となることから, $X^0$ の値は以下の様になる:

$$\begin{aligned} X^0 &= a_0\chi^0(0) + \sum_{\substack{i=3f \\ 1 \leq f \leq N-1}} a_i\chi^0(i) + \sum_{\substack{i=Ng \\ g=1,2}} a_i\chi^0(i) + \sum_{\substack{i=h \\ 3 \nmid h, N \nmid h}} a_i\chi^0(i) \\ &= 2(N-1) + \sum_{\substack{i=3f \\ 1 \leq f \leq N-1}} (-2) + \sum_{\substack{i=Ng \\ g=1,2}} -(N-1) + \sum_{\substack{i=h \\ 3 \nmid h, N \nmid h}} 1 \\ &= 2(N-1) + (-2) \cdot (N-1) + \{-(N-1)\} \cdot 2 + 2(N-1) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

次に $j=3f'$ $(1\leq f'\leq N-1)$ のときの $X^{3f'}$ の値を求める．まず，$\chi^{3f'}(i)=\zeta_{3N}^{i\cdot 3f'}=\zeta_N^{f'i}$ となるので，$i$ の場合分けを考えると，$i=0$ のとき，$a_0\chi^{3f'}(0)=2(N-1)\cdot\zeta_N^{f'\cdot 0}=2(N-1)$．さらに,$i=3f$ $(1\leq f\leq N-1)$ のとき，$a_{3f}\chi^{3f'}(3f)=-2\cdot\zeta_N^{f'\cdot 3f}=-2\zeta_N^{3ff'}$．次に,$i=Ng$ $(g=1,2)$ のとき，　$a_{Ng}\chi^{3f'}(Ng)=-(N-1)\cdot\zeta_N^{Ng\cdot f'}=-(N-1)$．また，$i=h$ $(1\leq h\leq 3N-1,\ 3\not|h,N\not|h)$ のとき，$a_h\chi^{3f'}(h)=1\cdot\zeta_N^{h\cdot f'}=\zeta_3^{hf'}$ となる．以上のことをまとめると，

$$a_i\chi^{3f'}(i)=\begin{cases}2(N-1), & i=0\\ -2\zeta_N^{3ff'}, & i=3f\ (1\leq f\leq N-1)\\ -(N-1), & i=Ng\ (g=1,2)\\ \zeta_N^{hf'}, & i=h\ (1\leq h\leq 3N-1,\ 3\not|h,N\not|h)\end{cases}\tag{3.55}$$

となる．よって，$X^{3f'}$ の値は,

$$X^{3f'}=a_0\chi^{3f'}(0)+\sum_{\substack{i=3f\\1\leq f\leq N-1}}a_i\chi^{3f'}(i)+\sum_{\substack{i=Ng\\g=1,2}}a_i\chi^{3f'}(i)+\sum_{\substack{i=h\\3\not|h,N\not|h}}a_i\chi^{3f'}(i)$$

を計算することにより，求まる．ここで，$GCD(N,3f)=1,GCD(N,f')=1$ より，$\sum_{\substack{i=3f\\1\leq f\leq N-1}}\zeta_N^{i\cdot f'}=-1$ となる．また，$\sum_{\substack{i=h\\3\not|h,N\not|h}}\zeta_N^{i\cdot f'}=-2$ となる．以上のことから，$X^{3f'}$ の値は次の様に求まる:

$$\begin{aligned}X^{3f'}&=2(N-1)-2\sum_{\substack{i=3f\\1\leq f\leq N-1}}\zeta_N^{3ff'}-(N-1)\cdot 2+\sum_{\substack{i=h\\3\not|h,N\not|h}}\zeta_N^{i\cdot f'}\\&=2(N-1)+2-2(N-1)-2\\&=0.\end{aligned}\tag{3.56}$$

$j=Ng'$ $(g'=1,2)$ のときの $X^{Ng'}$ の値を求める．まず，$\chi^{Ng'}(i)=\zeta_{3N}^{i\cdot Ng'}=\zeta_3^{g'i}$ となるのを用いて，$i$ の場合分けを考える．$i=0$ のとき，$a_0\chi^{Ng'}(0)=2(N-1)\cdot\zeta_3^{i\cdot g'}=2(N-1)$ となる．次に，$i=3f$ $(1\leq f\leq N-1)$ のとき，$a_{3f}\chi^{Ng'}(3f)=-2\cdot\zeta_3^{3f\cdot g'}=-2$．また，$i=Ng$ $(g=1,2)$ のとき，　$a_{Ng}\chi^{Ng'}(Ng)=-(N-1)\cdot\zeta_3^{Ng\cdot g'}=-(N-1)\zeta_3^{Ngg'}$．さらに，$i=h$ $(1\leq h\leq 3N-1,\ 3\not|h,N\not|h)$ のとき，$a_h\chi^{Ng'}(h)=1\cdot\zeta_3^{h\cdot g'}=\zeta_3^{hg'}$ となる．

以上のことをまとめると,

$$a_i\chi^{Ng'}(i)=\begin{cases} 2(N-1), & i=0 \\ -2, & i=3f\ (1\le f\le N-1) \\ -(N-1)\zeta_3^{Ngg'}, & i=Ng\ (g=1,2) \\ \zeta_3^{hg'}, & i=h\ (1\le h\le 3N-1,\ 3\not|h, N\not|h) \end{cases} \tag{3.57}$$

となるので, $X^{Ng'}$ の値は,

$$X^{Ng'}=a_0\chi^{3g'}(0)+\sum_{\substack{i=3f\\1\le f\le N-1}}a_i\chi^{Ng'}(i)+\sum_{\substack{i=Ng\\g=1,2}}a_i\chi^{Ng'}(i)+\sum_{\substack{i=h\\3\not|h,N\not|h}}a_i\chi^{Ng'}(i)$$

を計算することで得られる. ここで, $GCD(3,Ng)=1, GCD(3,g')=1$ より, $\sum_{\substack{i=Ng\\g=1,2}}\zeta_3^{i\cdot g'}=-1$ となる. また, $\sum_{\substack{i=h\\3\not|h,N\not|h}}\zeta_N^{i\cdot g'}=-(N-1)$ となる. 以上のことから, $X^{Ng'}$ の値は以下の様に定まる:

$$\begin{aligned} X^{Ng'} &= 2(N-1)-2\cdot(N-1)-(N-1)\sum_{\substack{i=Ng\\g=1,2}}\zeta_3^{i\cdot g'}+\sum_{\substack{i=h\\3\not|h,N\not|h}}\zeta_N^{i\cdot g'} \\ &= 2(N-1)+2(N-1)+(N-1)-(N-1) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

$j=h'$ $(1\le h'\le 3N-1,\ 3\not|h',\ N\not|h')$ のときの, $X^{h'}$ の値を求める. このとき, $\chi^{h'}(i)=\zeta_{3N}^{i\cdot h'}$ となることを用いて, 計算を進めていく. まず, $i=0$ のとき, $a_0\chi^{h'}(0)=2(N-1)\cdot\zeta_{3N}^{0\cdot h'}=2(N-1)$ となる. また, $i=3f$ $(1\le f\le N-1)$ のとき, $a_{3f}\chi^{h'}(3f)=-2\cdot\zeta_{3N}^{3f\cdot h'}=-2\zeta_N^{fh'}$. 次に, $i=Ng$ $(g=1,2)$ のとき, $a_{Ng}\chi^{h'}(Ng)=-(N-1)\cdot\zeta_{3N}^{Ng\cdot h'}=-(N-1)\zeta_3^{gh'}$. 最後に, $i=h$ $(1\le h\le 3N-1,\ 3\not|h, N\not|h)$ のとき, $a_h\chi^{h'}(h)=1\cdot\zeta_{3N}^{h\cdot h'}=\zeta_{3N}^{hh'}$ となる. これをまとめると,

$$a_i\chi^{h'}(i)=\begin{cases} 2(N-1), & i=0 \\ -2\zeta_N^{fh'}, & i=3f\ (1\le f\le N-1) \\ -(N-1)\zeta_3^{gh'}, & i=Ng\ (g=1,2) \\ \zeta_{3N}^{hh'}, & i=h\ (1\le h\le 3N-1,\ 3\not|h, N\not|h) \end{cases} \tag{3.59}$$

となる. よって, $X^{h'}$ の値は,

$$X^{h'}=a_0\chi^{h'}(0)+\sum_{\substack{i=3f\\1\le f\le N-1}}a_i\chi^{h'}(i)+\sum_{\substack{i=Ng\\g=1,2}}a_i\chi^{h'}(i)+\sum_{\substack{i=h\\3\not|h,N\not|h}}a_i\chi^{h'}(i)$$

を計算することにより, 求まる. ここで, $GCD(N,f)=1, GCD(N,h')=1$ より, $\sum_{\substack{i=3f \\ 1\le f\le N-1}} \zeta_{3N}^{i\cdot h'} = -1$ と得られる. また, $GCD(3,g)=1, GCD(3,h')=1$ より, $\sum_{\substack{i=Ng \\ g=1,2}} \zeta_{3N}^{i\cdot h'} = -1$ となる. さらに, $GCD(3N,h)=1, GCD(3N,h')=1$ より, $\sum_{\substack{i=h \\ 3\nmid h, N\nmid h}} \zeta_{3N}^{i\cdot h'} = 1$ となる. 以上のことから, $X^{h'}$ の値は次の様に求まる:

$$\begin{aligned} X^{h'} &= 2(N-1) - 2\sum_{\substack{i=3f \\ 1\le f\le N-1}} \zeta_{3N}^{ih'} - (N-1)\sum_{\substack{i=Ng \\ g=1,2}} \zeta_{3N}^{i\cdot h'} + \sum_{\substack{i=h \\ 3\nmid h, N\nmid h}} \zeta_{3N}^{i\cdot h'} \\ &= 2(N-1) + 2 + (N-1) + 1 \qquad (3.60) \\ &= 3N. \end{aligned}$$

以上のことから, 命題 3.3 の証明が完成した.□

### 3.1.1 $n=3$ の場合の零和アレイ

この節では, $n \equiv 0 \pmod 3$ の場合の例として, $n=3$ の場合の零和アレイの具体的な形を示す. まず, $\mathbf{w}(3)=\{(0,1),(1,3),(3,0)\}$ であり, この $\mathbf{w}(3)$ から作られる特性多項式 $m_{\mathbf{w}(3)}$ の解 $V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}(3)})$ は以下の 14 個になる:

$$V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}(3)}) = \left\{ \begin{array}{l} (\zeta_{21}^4,\zeta_{21}^5),(\zeta_{21}^{16},\zeta_{21}^{20}),(\omega,\omega^2),(\zeta_{21}^{19},\zeta_{21}^{8}),(\zeta_{21}^{10},\zeta_{21}^{2}), \\ (\zeta_{21}^1,\zeta_{21}^{17}),(\zeta_{21}^{13},\zeta_{21}^{11}),(\zeta_{21}^{8},\zeta_{21}^{10}),(\zeta_{21}^{20},\zeta_{21}^{4}),(\zeta_{21}^{11},\zeta_{21}^{19}), \\ (\zeta_{21}^2,\zeta_{21}^{13}),(\omega^2,\omega),(\zeta_{21}^{5},\zeta_{21}^{1}),(\zeta_{21}^{17},\zeta_{21}^{16}) \end{array} \right\} \qquad (3.61)$$

この解を用いて作られる零和アレイの例として, 解 $(\zeta_{21}^4,\zeta_{21}^5)$ に対応するアレイ $\mathbf{a}(\zeta_{21}^4,\zeta_{21}^5)$ を挙げると, 次の様になる ($\zeta_{21}$ を $\zeta$ と表す):

$$
\begin{array}{cccccccc}
\zeta^{16} & \zeta^{12} & \zeta^{8} & \zeta^{4} & 1 & \zeta^{17} & \zeta^{13} & \zeta^{9} \\
1 & \zeta^{17} & \zeta^{13} & \zeta^{9} & \zeta^{5} & \zeta & \zeta^{18} & \zeta^{14} \\
\zeta^{5} & \zeta & \zeta^{18} & \zeta^{14} & \zeta^{10} & \zeta^{6} & \zeta^{2} & \zeta^{19} \\
\zeta^{10} & \zeta^{6} & \zeta^{2} & \zeta^{19} & \zeta^{15} & \zeta^{11} & \zeta^{7} & \zeta^{3} \\
\zeta^{15} & \zeta^{11} & \zeta^{7} & \zeta^{3} & \zeta^{20} & \zeta^{16} & \zeta^{12} & \zeta^{8} \\
\zeta^{20} & \zeta^{16} & \zeta^{12} & \zeta^{8} & \zeta^{4} & 1 & \zeta^{17} & \zeta^{13} \\
\zeta^{4} & 1 & \zeta^{17} & \zeta^{13} & \zeta^{9} & \zeta^{5} & \zeta & \zeta^{18} \\
\zeta^{9} & \zeta^{5} & \zeta & \zeta^{18} & \zeta^{14} & \zeta^{10} & \zeta^{6} & \zeta^{2}
\end{array}
$$

Fig 2: $\mathbf{a}(\zeta_{21}^4, \zeta_{21}^5)$

この解を (3.17) の $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(3)}$ の部分空間 $V_1, V_2$ に当てはめると,

$$
\begin{cases}
V_1 =< \mathbf{a}(\omega, \omega^2), \mathbf{a}(\omega^2, \omega) >_{\mathbb{C}}, \\
V_2 =< \mathbf{a}(\zeta_{21}^{4k}, \zeta_{21}^{5k}); 1 \le k \le 21,\ 3 \not| k,\ 7 \not| k >_{\mathbb{C}} .
\end{cases}
\tag{3.62}
$$

と分けることができ, さらに (3.25) の $S_1, S_2$ は以下の様になる:

$$
\begin{cases}
S_1 & = \mathbf{a}(\omega, \omega^2) + \mathbf{a}(\omega^2, \omega) \in V_1, \\
S_2 & = \sum_{\substack{k=1 \\ 3 \not| k, 7 \not| k}}^{20} \mathbf{a}(\zeta_{21}^{4k}, \zeta_{21}^{5k}) \in V_2.
\end{cases}
\tag{3.63}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&\omega + \omega^2 = -1, \\
&\zeta_{21}^3 + \zeta_{21}^6 + \cdots + \zeta_{21}^{18} = -1, \\
&\zeta_{21}^1 + \zeta_{21}^2 + \zeta_{21}^4 + \cdots + \zeta_{21}^{20} = 1,
\end{aligned}
$$

であるから, アレイ $S_1, S_2$ は次の様になる:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 |
| 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 |
| −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 |
| −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 |
| 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 |
| −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 |
| −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 |
| 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 |

Fig 3: $S_1$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | 1 | 1 | 12 | 1 | 1 | −2 |
| 12 | 1 | 1 | −2 | 1 | 1 | −2 | −6 |
| 1 | 1 | −2 | −6 | 1 | −2 | 1 | 1 |
| 1 | −2 | 1 | 1 | −2 | 1 | −6 | −2 |
| −2 | 1 | −6 | −2 | 1 | 1 | −2 | 1 |
| 1 | 1 | −2 | 1 | 1 | 12 | 1 | 1 |
| 1 | 12 | 1 | 1 | −2 | 1 | 1 | −2 |
| −2 | 1 | 1 | −2 | −6 | 1 | −2 | 1 |

Fig 4: $S_2$

ここで $S_2$ の原点からの $x$ 軸上の値に注目すると, 21 個の値で 1 周期となっており, この並びは

$$v^0 = (12, 1, 1, -2, 1, 1, -2, -6, 1, -2, 1, 1, -2, 1, -6, -2, 1, 1, -2, 1, 1) \qquad (3.64)$$

となる. これを 1 つずつ左に動かしたもの $v^k = (v^0_{i-k})_{i=0,\cdots,20} (1 \leq k \leq 20)$ を縦に重ね,$21 \times 21$ 行列を作り, 行基本変形を行うと次の様な行列を得る:

$$M \cong \begin{pmatrix} E_{12} & M_{12,9} \\ O & O \end{pmatrix}.$$

$E_{12}$ は $12 \times 12$ の単位行列であり, $M_{12,9}$ は以下の様な $12 \times 9$ 行列になる:

$$M_{12,9} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

よって,$M_1$ のランクは 12 であり,$V_2$ の次元と一致し, 同様のことを $S_1$ でも行うと, 行列のランクが 2 となり,$V_1$ の次元と一致した. よって,$12+2=14$ であり, 特性多項式の解の個数と一致していることが確認できたので, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(3)}$ の $\mathbb{Q}$ 基底であって, その値がすべて $0, \pm 1$ であるものが得られる.

### 3.1.2 $n=4$ の場合の零和アレイ

次に, $n \equiv 1 \mod 3$ の例として, $n=4$ の場合を挙げる. このとき, ウィンドウは $\mathbf{w}(4) = \{(0,1),(1,4),(4,0)\}$ となり, 命題 3.1 より, 特性多項式の解 $V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}(4)})$ は以下の 26 個になる:

$$V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}(4)}) = \left\{ \begin{array}{l} (\zeta_{39}^5, \zeta_{39}^7), (\zeta_{39}^{20}, \zeta_{39}^{28}), (\zeta_{39}^{35}, \zeta_{39}^{10}), (\zeta_{39}^{11}, \zeta_{39}^{31}), (\omega^2, \omega), \\ (\zeta_{39}^{2}, \zeta_{39}^{34}), (\zeta_{39}^{17}, \zeta_{39}^{16}), (\zeta_{39}^{32}, \zeta_{39}^{37}), (\zeta_{39}^{8}, \zeta_{39}^{19}), (\zeta_{39}^{23}, \zeta_{39}^{1}), \\ (\zeta_{39}^{38}, \zeta_{39}^{22}), (\zeta_{39}^{14}, \zeta_{39}^{4}), (\zeta_{39}^{29}, \zeta_{39}^{25}), (\zeta_{39}^{10}, \zeta_{39}^{14}), (\zeta_{39}^{25}, \zeta_{39}^{35}), \\ (\zeta_{39}^{1}, \zeta_{39}^{17}), (\zeta_{39}^{16}, \zeta_{39}^{38}), (\zeta_{39}^{31}, \zeta_{39}^{20}), (\zeta_{39}^{7}, \zeta_{39}^{2}), (\zeta_{39}^{22}, \zeta_{39}^{23}), \\ (\zeta_{39}^{37}, \zeta_{39}^{5}), (\omega, \omega^2), (\zeta_{39}^{28}, \zeta_{39}^{8}), (\zeta_{39}^{4}, \zeta_{39}^{29}), (\zeta_{39}^{19}, \zeta_{39}^{11}), \\ (\zeta_{39}^{34}, \zeta_{39}^{32}) \end{array} \right\} \tag{3.65}$$

アレイの例として $\mathbf{a}(\omega^2, \omega)$ と $\mathbf{a}(\zeta_{39}^5, \zeta_{39}^7)$ は以下の様になる:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\
1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega \\
\omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 \\
\omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\
1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega \\
\omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 \\
\omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\
1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega
\end{array}
$$

Fig 5: $\mathbf{a}(\omega^2, \omega)$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\zeta^{2} & \zeta^{36} & \zeta^{31} & \zeta^{26} & \zeta^{21} & \zeta^{16} & \zeta^{11} & \zeta^{6} \\
\zeta^{9} & \zeta^{4} & \zeta^{38} & \zeta^{33} & \zeta^{28} & \zeta^{23} & \zeta^{18} & \zeta^{13} \\
\zeta^{16} & \zeta^{11} & \zeta^{6} & \zeta & \zeta^{35} & \zeta^{30} & \zeta^{25} & \zeta^{20} \\
\zeta^{23} & \zeta^{18} & \zeta^{13} & \zeta^{8} & \zeta^{3} & \zeta^{37} & \zeta^{32} & \zeta^{27} \\
\zeta^{30} & \zeta^{25} & \zeta^{20} & \zeta^{15} & \zeta^{10} & \zeta^{5} & 1 & \zeta^{34} \\
\zeta^{37} & \zeta^{32} & \zeta^{27} & \zeta^{22} & \zeta^{17} & \zeta^{12} & \zeta^{7} & \zeta^{2} \\
\zeta^{5} & 1 & \zeta^{34} & \zeta^{29} & \zeta^{24} & \zeta^{19} & \zeta^{14} & \zeta^{9} \\
\zeta^{12} & \zeta^{7} & \zeta^{2} & \zeta^{36} & \zeta^{31} & \zeta^{26} & \zeta^{21} & \zeta^{16}
\end{array}
$$

Fig 6: $\mathbf{a}(\zeta_{39}^5, \zeta_{39}^7)$

この解を $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(4)}$ の部分空間 $V_1, V_2$ に当てはめると,

$$
\begin{cases}
V_1 =< \mathbf{a}(\omega, \omega^2), \mathbf{a}(\omega^2, \omega) >_{\mathbb{C}}, \\
V_2 =< \mathbf{a}(\zeta_{39}^{5k}, \zeta_{39}^{7k}); 1 \le k \le 39,\ 3 \not| k,\ 13 \not| k >_{\mathbb{C}},
\end{cases}
\tag{3.66}
$$

と分けることができ, さらに $S_1, S_2$ を定義すると以下の様になる:

$$
\begin{cases}
S_1 & = \mathbf{a}(\omega, \omega^2) + \mathbf{a}(\omega^2, \omega) \in V_1, \\
S_2 & = \sum_{\substack{k=1 \\ 3 \not| k, 13 \not| k}}^{38} \mathbf{a}(\zeta_{39}^{5k}, \zeta_{39}^{7k}) \in V_2.
\end{cases}
\tag{3.67}
$$

補足として, 以下の計算から $S_2$ は有理化される:

$$
\zeta_{39}^3 + \zeta_{39}^6 + \cdots + \zeta_{39}^{36} = -1,
$$
$$
\zeta_{39}^1 + \zeta_{39}^2 + \zeta_{39}^4 + \cdots + \zeta_{39}^{38} = 1.
$$

よって, アレイ $S_1, S_2$ は以下の様になる:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 |
| 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 |
| −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 |
| −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 |
| 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 |
| −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 |
| −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 |
| 2 | −1 | −1 | 2 | −1 | −1 | 2 | −1 |

Fig 7: $\mathbf{S}_1$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | 1 | −12 | −2 | 1 | 1 | −2 |
| −2 | 1 | 1 | −2 | 1 | 1 | −2 | −12 |
| 1 | 1 | −2 | 1 | 1 | −2 | 1 | 1 |
| 1 | −2 | −12 | 1 | −2 | 1 | 1 | −2 |
| −2 | 1 | 1 | −2 | 1 | 1 | 24 | 1 |
| 1 | 1 | −2 | 1 | 1 | −2 | 1 | 1 |
| 1 | 24 | 1 | 1 | −2 | 1 | 1 | −2 |
| −2 | 1 | 1 | −2 | 1 | −12 | −2 | 1 |

Fig 8: $\mathbf{S}_2$

ここで $S_2$ の $x$ 軸上の値の周期に注目すると, 1 周期が 39 個の要素からなる次の $v^0$ が見える:

$$\begin{aligned} v^0 = \ & 24, 1, 1, -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2, -12, 1, -2, 1, 1, \\ & -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2, 1, -12, -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2, 1, 1. \end{aligned} \tag{3.68}$$

さらに, $v^0$ を左に 1 つずつ動かしたものを $v^k = (v^0_{i-k})_{i=0,\cdots,38} (1 \le k \le 38)$ とし, これを縦に重ね $39 \times 39$ 行列 $M$ を作り, それを行基本変形すると

$$M \cong \begin{pmatrix} E_{24} & M_{24,15} \\ O & O \end{pmatrix},$$

となる. $E_{24}$ は $24 \times 24$ の単位行列であり, 特に $M_{24,15}$ は以下の様な $24 \times 15$ 行列になる:

$$M_{24,15} = \begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1
\end{pmatrix}.$$

よって $M$ のランクが 24 であることが分かり, これは $V_2$ の次元と一致し, $S_1$ のアレイは $n = 3$ の場合と同じなので, 行列 $M$ のランクと $V_1$ の次元は 2 となる. 以上より $24 + 2 = 26$ であり, 特性多項式の解の個数と一致したので, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(4)}$ のすべての $\mathbb{Q}$ 基底であって, その値がすべて $0, \pm 1$ であるものが得られる.

次の節 3.2 において, 節 3.1.1 と節 3.1.2 で観察された現象を一般化する.

## 3.2　$n \equiv 0, 1 \pmod 3$ の場合の $M$ の形の一般化

前節での具体例に現れた行列の基本変形を一般化した形を定義し, そこから逆に作られるアレイが $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(n)}$ に属することを示したい．前節をふまえると, 以下の様に予想される．一般の場合 $M$ は $3N \times 3N$ 行列となり, それを基本変形すると

$$\begin{pmatrix} E_{2(N-1)} & M_{2(N-1),(N+2)} \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{3.69}$$

$$E_{2(N-1)} \quad : 2(N-1) \times 2(N-1) \text{ 単位行列}, \tag{3.70}$$

$$M_{2(N-1),(N+2)} \quad : 2(N-1) \times (N+2) \text{ 行列}, \tag{3.71}$$

という形になるであろう．さらに, 行列 $M_{2(N-1),(N-1)}$ に注目すると, この行列は $(N-1) \times (N+2)$ 行列 $M^1, M^2$ を用いて,

$$M_{2(N-1),(N+2)} = \begin{pmatrix} M^1 \\ M^2 \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

と表すことができ, この行列 $M^1$ の $i$ 行 $j$ 列の値を $M^1_{ij}$ と表すとき, $i$ の値で場合分けを行うと, 行列 $M^1$ は次の様に表すことができるであろう:

| $j$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ | $i+2$ | $\cdots$ | $N+1$ | $N+2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M^1_{ij}(i \equiv 1 \pmod 3)$ | $-1$ | $-1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $1$ |
| $M^1_{ij}(i \equiv 2 \pmod 3)$ | $1$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $M^1_{ij}(i \equiv 0 \pmod 3)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-1$ |
| $M^1_{ij}(i = N-1)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $-1$ |

(3.73)

また, 行列 $M^2$ の $i$ 行 $j$ 列の値 $M^2_{ij}$ は行列 $M^1$ を用いて, $M^2 = (M^2_{ij}) = (M^1_{(N-i)(N+3-j)})$ と表すことができるであろう．

そこで, これらの行から作られる $0$ と $\pm 1$ のみで構成されたアレイが, ウィンドウ $\mathbf{w}(n) = \{(0,1),(1,n),(n,0)\}$ に対して, 零和アレイであるか確認を行う．

まず, $V_2$ に属するアレイ $\mathbf{a}^k = \mathbf{a}(\zeta_{3N}^{k(n+1)}, \zeta_{3N}^{k(2n-1)})$ の座標 $(i,j)$ での値は,

$$\mathbf{a}^k_{(i,j)} = \zeta_{3N}^{-ik(n+1)} \cdot \zeta_{3N}^{-jk(2n-1)} \tag{3.74}$$

で求まるのであった．

従って, $\mathbf{w}(n)$ のそれぞれの点での値は, まず $(i,j)=(0,1)$ のとき,

$$\mathbf{a}^k_{(0,1)} = \zeta_{3N}^{-k(2n-1)} \tag{3.75}$$

となる. また, $(i,j)=(1,n)$ のときは,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^k_{(1,n)} &= \zeta_{3N}^{-k(n+1)-nk(2n-1)} \\ &= \zeta_{3N}^{k(-n-1-2n^2+n)} \\ &= \zeta_{3N}^{-k(2n^2+1)},\end{aligned} \tag{3.76}$$

となり, $(i,j)=(n,0)$ の値は以下の様になる:

$$\mathbf{a}^k_{(n,0)} = \zeta_{3N}^{-k(n^2+n)}. \tag{3.77}$$

ここで, これらの値の $\zeta_{3N}$ の指数で, $-k$ で括られた式に注目すると, それらは以下の様になる:

$$\begin{cases} 2n-1, & (i,j)=(0,1), \\ 2n^2+1, & (i,j)=(1,n), \\ n^2+n, & (i,j)=(n,0). \end{cases} \tag{3.78}$$

ここで, この指数のそれぞれの差を考えると,

$$2n^2+1-(2n-1) = 2n^2-2n+2 \quad = \quad 2N, \tag{3.79}$$

$$2n^2+1-(n^2+n) = n^2-n+1 \quad = \quad N, \tag{3.80}$$

$$n^2+n-(2n-1) = n^2-n+1 \quad = \quad N, \tag{3.81}$$

となり, 差がすべて $N, 2N$ で表すことができた. 以上より, ウィンドウで覗く部分の値が全て $x$ 軸上の値とリンクすることができ, 参照する $x$ 座標の間隔が $j$ を起点に, $j$ , $j+N$, $j+2N$ となることが分かった. この, ウィンドウにリンクする $x$ 軸上の座標を, ベクトルとして以下の様に表すことができる:

$$f^i = e_{3N}^j + e_{3N}^{j+N} + e_{3N}^{j+2N} \ (1 \leq j \leq N). \tag{3.82}$$

ただし, ここで $e_{3N}^k$ $(1 \leq k \leq 3N)$ は行ベクトル空間 $\mathbb{Q}^{3N}$ の標準基底を表すものとする.

このことに注意して, 次の定理が成り立つことを示したい:

**Theorem 3.1** $\mathbb{Q}^{3N}$ の標準基底を $e^i$ $(1 \leq i \leq 3N)$ とし, 任意の $i$ $(1 \leq i \leq N-2)$ に対し, $\mathbb{Q}^{3N}$ のベクトル $m^i$ を

$$m^i = \begin{cases} e^i - e^{2N-1} - e^{2N} - e^{2N+i} + e^{3N-1} + e^{3N}, & i \equiv 1 \pmod 3 \\ e^i + e^{2N-1} - e^{2N+i} - e^{3N-1}, & i \equiv 2 \pmod 3 \\ e^i + e^{2N} - e^{2N+i} - e^{3N}, & i \equiv 0 \pmod 3 \end{cases} \tag{3.83}$$

さらに,

$$m^{N-1} = e^{N-1} + e^{2N} - e^{3n-1} - e^{3N}, \tag{3.84}$$

とおく. このとき, 任意の $(i,j) \in [1, N-1] \times [1, N]$ に対して

$$< m^i, f^j >= 0 \tag{3.85}$$

が成り立つ. ただし $< \cdot, \cdot >$ は $\mathbb{Q}^{3N}$ の標準内積である.

Proof: まず, $i \equiv 1 \pmod 3$ のとき, $< m^i, f^j >$ は,

$$< m^i, f^j >=< e^i - e^{2N-1} - e^{2N} - e^{2N+i} + e^{3N-1} + e^{3N},\ e^j + e^{j+N} + e^{j+2N} >, \tag{3.86}$$

となり, これを $j$ の値に注意して場合分けを行うと以下の様になる:

$$< m^i, f^j >= \begin{cases} 0, & j \leq N-2, j \neq i \\ < e^i, e^i > - < e^{2N+i}, e^{2N+i} >= 0, & j \leq N-2, j = i \\ - < e^{2N-1}, e^{2N-1} > + < e^{3N-1}, e^{3N-1} >= 0, & j = N-1 \\ - < e^{2N}, e^{2N} > + < e^{3N}, e^{3N} >= 0. & j = N \end{cases} \tag{3.87}$$

次に, $i \equiv 2 \pmod 3$ のとき, $< m^i, f^j >$ は,

$$< m^i, f^j >=< e^i + e^{2N-1} - e^{2N+i} - e^{3N-1},\ e^j + e^{j+N} + e^{j+2N} >, \tag{3.88}$$

となり, $j$ の値で場合分けを行うと以下の様になる:

$$< m^i, f^j >= \begin{cases} 0, & j \leq N-2, j \neq i \\ < e^i, e^i > - < e^{2N+i}, e^{2N+i} >= 0, & j \leq N-2, j = i \\ < e^{2N-1}, e^{2N-1} > - < e^{3N-1}, e^{3N-1} >= 0, & j = N-1 \\ 0. & j = N \end{cases} \tag{3.89}$$

また, $i \equiv 0 \pmod 3$ のとき,

$$< m^i, f^j > = < e^i + e^{2N} - e^{2N+i} - e^{3N},\ e^j + e^{j+N} + e^{j+2N} > . \tag{3.90}$$

より, これを $j$ の値で場合分けを行うと以下の様になる:

$$< m^i, f^j > = \begin{cases} 0, & j \leq N-1, j \neq i \\ < e^i, e^i > - < e^{2N+i}, e^{2N+i} > = 0, & j \leq N-1, j = i \\ < e^{2N}, e^{2N} > - < e^{3N}, e^{3N} > = 0. & j = N \end{cases} \tag{3.91}$$

さらに, $i = N-1$ のとき, 内積は

$$< m^{N-1}, f^j > = < e^{N-1} + e^{2N} - e^{3N-1} - e^{3N},\ e^j + e^{j+N} + e^{j+2N} >, \tag{3.92}$$

より, これを $j$ の値で場合分けを行うと以下の様になる:

$$< m^{N-1}, f^j > = \begin{cases} 0, & j \leq N-2 \\ < e^{N-1}, e^{N-1} > - < e^{3N-1}, e^{3N-1} > = 0, & j = N-1 \\ < e^{2N}, e^{2N} > - < e^{3N}, e^{3N} > = 0. & j = N \end{cases} \tag{3.93}$$

以上, すべての場合の内積が 0 になることが証明された.□

次に, $V_2$ に属するアレイの, 値が 1 になる点の座標を求める.

**Proposition 3.4** $V_2$ に属する零和アレイの値が, $\mathbf{a}_{(i,j)} = (x_0^i y_0^j)^{-1} = 1$ を満たす $(i,j)$ の条件は, $3N$ を法として, 以下の様な $i$ の合同式で表すことができる :

$$i \equiv -(2n-1)(n+1)^{-1} j \pmod{3N}. \tag{3.94}$$

Proof: 定理 2.2 および命題 3.1 より, $t = \zeta_{3N}^k$ $(1 \leq k \leq 3N-1,\ 3 \not| k)$ を用いて,

$$(t^{(n+1)i} \cdot t^{(2n-1)j})^{-1} = 1, \tag{3.95}$$

を満たす $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ を求める. 指数に注目するとき, $t = \zeta_{3N}^k$ より, $t^{3N} = 1 = t^0$ が成り立つでの $3N$ を法とした次の式が得られる:

$$\begin{aligned} \{(n+1)i + (2n-1)j\}(-1) &\equiv 0 \pmod{3N}, \\ (n+1)i + (2n-1)j &\equiv 0 \pmod{3N}, \\ (n+1)i &\equiv -(2n-1)j \pmod{3N}. \end{aligned}$$

ここで, $n+1$ と $3N = 3(n^2-n+1)$ の関係は, $n \equiv 0, 1 \pmod 3$ より, $GCD(n+1, 3) = 1$, また,

$$\begin{aligned} GCD(n+1, N) &= GCD(n+1, n^2-n+1) \\ &= GCD(n+1, n^2-n+1-(n-2)(n+1)) \\ &= GCD(n+1, 3) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから, $GCD(n+1, 3N) = 1$ が得られる. このことから $3N$ を法としたときに, $(n+1)^{-1}$ が存在する. 以上より $i$ は以下の様に定まる :

$$i \equiv -(2n-1)(n+1)^{-1} j \pmod{3N}. \square$$

**Corollary 3.1** $m^i$ から次のルールでアレイ $\mathbf{b}^i$ を作る :

$$\mathbf{b}^i_{(r,s)} = m^i_{[r-f(s)]_{3N}}. \tag{3.96}$$

ただし, $f(s) = -(2n-1)(n+1)^{-1}s, [x]_{3N}$ は, $x$ の $mod\ 3N$ での非負最小代表元を表すものとする. このとき $\mathbf{b}^i \in \mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(n)}$ である.

Proof: 命題 3.4 より $(r,s)$ が, $r \equiv f(s) \pmod{3N}$ を満たすとき, $\mathbf{a}^k_{(r,s)} = 1$ となる. また, $V_2$ のアレイはすべて二重周期 $(3N, 0), (f(1), 1)$ を持つことから, 系が成り立つ. $\square$

さらに, 行列 $M^2$ から同様のやり方で $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(n)}$ に属するアレイ $\mathbf{c}^i$ $(1 \le i \le N-1)$ を作ることができ, 以下の定理を得る:

**Theorem 3.2** $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}(n)}$ の $\mathbb{Q}$ 基底として, その値がすべて $0, \pm 1$ であるアレイを取ることができる.

# 4　横幅が $n$ の $L$ 字型ウィンドウに対する離散トモグラフィー

この章では, 南との共著論文 [9] から, 特に私が担当した部分について述べる.

$n$ が 2 以上の整数のとき, ウィンドウ $\mathbf{w}_n$ を以下の様な横幅が $n$ の $L$ 字型ウィンドウとする:

$$\mathbf{w}_n = \{(0.1), (0.0), (1.0), (2.0), \cdots (n-1.0)\}. \tag{4.1}$$

これに付随する零和アレイ $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}$ を求めると, 3 章と同様に, 値が 1 の累乗根 $\zeta$ で表された零和アレイが得られる. よって, 零和アレイの有理化を考え, さらにそこから, 値が $0, \pm 1$ からなる零和アレイを求めていく.

まず, このウィンドウ $\mathbf{w}_n$ に対応する特性多項式 $m_{\mathbf{w}_n}$ は, 定義 2.1 より以下の様になる:

$$m_{\mathbf{w}_n} = 1 + y + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}. \tag{4.2}$$

ここで, $m_{\mathbf{w}_n} = 0$ を考える. $(x, y) \in V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}_n})$ に対し, $\bar{x} = \frac{1}{x}, \bar{y} = \frac{1}{y}$ となることから, 特性多項式 $m_{\mathbf{w}_n} = 0$ に対して, $\overline{m_{\mathbf{w}_n}}$ を考えるとき, この式は以下の様になる:

$$\overline{m_{\mathbf{w}_n}} = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^{n-1}}. \tag{4.3}$$

また, $\overline{m_{\mathbf{w}_n}} = 0$ の両辺に $x^{n-1}y$ を掛けると,

$$x^{n-1}y + x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y + \cdots + xy + y = 0, \tag{4.4}$$

となり, $m_{\mathbf{w}_n} = 0$ から (4.4) を引くと次の式を得る:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2} = xy + x^2y + x^3y + \cdots + x^{n-1}y. \tag{4.5}$$

よって, これを整理すれば次の式を得ることが出来る:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-2})(1 - xy) = 0. \tag{4.6}$$

まず, $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-2} = 0$ のとき, この解は $x = \zeta^k_{n-1}\,(1 \le k \le n-2)$ となる. これを, 元の $m_{\mathbf{w}_n} = 0$ に代入すると $y = -1$ を得るので, 以下の様な $n-2$ 個の解を得る:

$$(x, y) = (\zeta^k_{n-1}, -1)\,(1 \le k \le n-2). \tag{4.7}$$

また, $1-xy=0$ のとき, これを変形した $x=\frac{1}{y}$ を $m_{\mathbf{w}_n}=0$ に代入すると,

$$1+y+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\cdots+\frac{1}{y^{n-1}}=0, \tag{4.8}$$

となり, これの両辺に $y^{n-1}$ を掛けると, 次の様になる:

$$y^{n-1}+y^n+y^{n-2}+y^{n-3}+\cdots+1=0. \tag{4.9}$$

この式の解は $y=\zeta_{n+1}^l\,(1\le l\le n)$ であり, 条件の $x=\frac{1}{y}$ より, 以下の $n$ 個の解を得る:

$$(x,y)=(\zeta_{n+1}^l,\zeta_{n+1}^{n+1-l})\,(1\le l\le n). \tag{4.10}$$

しかし, $n$ が奇数のとき,(4.7) と (4.10) は以下の唯一の共通解をもつ:

$$(\zeta_{n-1}^{\frac{n-1}{2}},-1)=(-1,-1),(\zeta_{n+1}^{\frac{n+1}{2}},\zeta_{n+1}^{\frac{n+1}{2}})=(-1,-1).$$

よって, 特性多項式の解の個数 $\#(V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}_n}))$ は以下の様になる:

$$\#(V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w}_n}))=\begin{cases}2n-2, & n\equiv 0\,(mod\,2),\\ 2n-3, & n\equiv 1\,(mod\,2).\end{cases} \tag{4.11}$$

また, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}$ の部分空間 $V_1,V_2$ を, 以下の様に定義する:

$$\begin{cases}V_1 &=& <\mathbf{a}(\zeta_{n-1}^k,-1);1\le k\le n-2)>_{\mathbb{C}},\\ V_2 &=& <\mathbf{a}(\zeta_{n+1}^l,\zeta_{n+1}^{n+1-l});1\le l\le n>_{\mathbb{C}}.\end{cases} \tag{4.12}$$

すると, $n$ が偶数のとき, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}$ は $V_1,V_2$ を用いて,

$$\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}=V_1\oplus V_2, \tag{4.13}$$

$$V_1\cap V_2=\{0\}, \tag{4.14}$$

と表すことができる. また, $n$ が奇数のときは以下の様に表すことができる:

$$\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}=V_1+V_2, \tag{4.15}$$

$$V_1\cap V_2=<\mathbf{a}(-1,-1)>_{\mathbb{C}}. \tag{4.16}$$

以上のことから, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}$ の次元は, 以下の様になる:

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}=\begin{cases}2n-2, & n\equiv 0(mod\ 2),\\ 2n-3, & n\equiv 1(mod\ 2).\end{cases} \tag{4.17}$$

この章の目標は, 次の定理を証明することである:

**Theorem 4.1** 任意の自然数 $n\,(\geq 2)$ に対し, ウィンドウ $\mathbf{w}_n$ に付随する零和アレイの空間 $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_n}$ は全ての値が $0, \pm 1$ であるような $\mathbb{Q}$ 基底を持つ.

以下では, $n$ が偶数の場合と奇数の場合に分けて, 主張されている $\mathbb{Q}$ 基底を具体的に構成する.

## 4.1 $n \equiv 0 \ (mod\, 2)$ の場合

まず, $S_1, S_2$ を以下のように定義する:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-2} \mathbf{a}(\zeta_{n-1}^k, -1) \in V_1, \tag{4.18}$$

$$S_2 = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{a}(\zeta_{n+1}^l, \zeta_{n+1}^{n+1-l}) \in V_2. \tag{4.19}$$

すると, アレイ $S_1, S_2$ の値は, それぞれガロア群 $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{n-1})/\mathbb{Q})$ と,$Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})/\mathbb{Q})$ の作用で不変であることから, 有理数となる. また, $\sum_{i=1}^{m-1} \zeta_m^i = -1$ となることから, $S_1, S_2$ は以下の様なシンプルなアレイとなる:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2-n & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n & 1 \\
-1 & n-2 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-2 & -1 \\
1 & 2-n & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n & 1 \\
-1 & n-2 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-2 & -1 \\
1 & 2-n & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n & 1
\end{array}$$

Fig 9: $S_1$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
-1 & -1 & -1 & -1 & n & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & n & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & n \\
-1 & -1 & n & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & n & -1 \\
-1 & n & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & n & -1 & -1 \\
n & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & n & -1 & -1 & -1
\end{array}
$$

Fig 10: $S_2$

また, $S_1, S_2$ の生成する部分空間の次元を求める計算の過程で, 次の補題が有用な為, 先に証明を行う.

**Lemma 4.1** 任意の整数 $m \geq 2$ に対し, 以下の様な $(m+1) \times (m+1)$ 行列 $A_m$ を考える :

$$
A_m = \begin{pmatrix}
m & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & m & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & -1 & m & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \cdots & m
\end{pmatrix}.
$$

このとき, $A_m$ に行基本変形を行うことで, 以下の様な $(m+1) \times (m+1)$ 行列 $B_m$ を得る :

$$
B_m = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

特に, *rank* $A_m = m$ となる.

Proof: $i$ 行を $c$ 倍して $j$ 行に加えるという行基本変形に対応する基本行列を $E(i, j : c)$ とおく. 同様に, $i$ 行を $c$ 倍する操作に対応する行列を $E(i : c)$ と表す.

これらを用いて, $A_m$ の行基本変形を行う. まず,

$$
\begin{aligned}
&E(m+1,1;-1)E(m+1,2;-1)\cdots E(m+1,m;-1)A_m \\
&= \begin{pmatrix}
m+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(m+1) \\
0 & m+1 & 0 & \cdots & 0 & -(m+1) \\
0 & 0 & m+1 & \cdots & 0 & -(m+1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & m+1 & -(m+1) \\
-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & m
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

となる. この行列を $A_m^{'}$ とし, さらに変形を続けると,

$$
\begin{aligned}
&E(1;1/m+1)E(2;1/m+1)\cdots E(m;1/m+1)A'_m \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & m
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

となる. さらにこの行列を $A_m^{''}$ とおくと, 以下の式を得ることができる:

$$E(1,m+1;1)E(2,m+1;1)\cdots E(m,m+1;1)A''_m = B_m.$$

以上より, 補題は証明された.□

ここで, アレイ $S_1$ の $j$ 行の値の並び $((S_1)_{(i,j)})_{i\in\mathbb{Z}}$ は, (4.18) より $(j-1)$ 行の値を-1 倍したものと等しい. また, $S_1$ の $x$ 軸上の値に注目すると, $n-1$ 個の値で 1 周期となっている. 従って, $(a_{(i,j)})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \longmapsto (a_{(i,0)})_{i\in[0,n-2]}$ によって定義される射影 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{[0,n-2]}$ は, $V_1$ から, その像の上への同型写像となる. 実際に, アレイ $((S_1)_{(i,0)})_{i=0,\cdots,n-2}$ を $u^1$ とおく:

$$u^1 = (n-2,-1,-1,\cdots,-1). \tag{4.20}$$

この $u^1$ を右に 1 つずつ動かしたものを, $u^k = (u_{i-k+1})_{i=0,\cdots,n-2}(2 \le k \le n-1)$ とする. (添字は, $n-1$ を法とした値とする.) よって, この $u^k(1 \le k \le n-1)$

を縦に重ねたとき, 次の様な $(n-1)\times(n-1)$ 行列 $A_{n-2}$ を得る:

$$A_{n-2}=\begin{pmatrix} n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-2 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-2 \end{pmatrix}.$$

この行列を, 補題 4.1 に従って行基本変形をすると, 以下の様な $(n-1)\times(n-1)$ 行列 $B_{n-2}$ を得る:

$$B_{n-2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

特に, $rank\ B_{n-2}=n-2$ となる. 以上より, 任意の整数 $k$ $(1\le k\le n-2)$ に対して, $B_{n-2}$ の $k$ 行から作られるアレイ $\mathbf{b}\in V_1$ は以下の様になる:

$$\mathbf{b}^k_{(i,j)}=\begin{cases} (-1)^j, & i\equiv k-1 \quad (mod\ n-1), \\ (-1)^{j+1}, & i\equiv -1 \quad (mod\ n-1), \\ 0, & i\not\equiv k-1,-1 \quad (mod\ n-1). \end{cases}$$

同様のことをアレイ $S_2$ で考えるとき, $(n+1)\times(n+1)$ 行列 $A_n$ を得るとともに, 補題 4.1 より, ランクが $n$ の行列 $B_n$ を得る. ここで, $V_2$ に属するすべてのアレイが 2 重周期 $\{(n+1,0),(1,1)\}$ をもつことに注意して, 任意の整数 $l$ $(1\le l\le n)$ に対し, $B_n$ の $l$ 行から作られるアレイ $\mathbf{d}^l\in V_2$ を, 次の様に定義することができる:

$$\mathbf{d}^l_{(i,j)}=\begin{cases} 1, & i-j\equiv l-1 \quad (mod\ n+1), \\ -1, & i-j\equiv -1 \quad (mod\ n+1), \\ 0, & i-j\not\equiv l-1,-1 \quad (mod\ n+1). \end{cases}$$

以上のことから, $V_1, V_2$ の $\mathbb{Q}$ 基底を得ることができた:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= <\mathbf{b}^k; 1 \le k \le n-2) >_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}, \\
V_2 &= <\mathbf{d}^l; 1 \le l \le n) >_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

しかも, これらのアレイの値は全て 0 か $\pm 1$ であることは, 注目すべきである.

例として, アレイ $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^{n-2}, \mathbf{d}^1, \mathbf{d}^n$ とともに, ウィンドウ $\mathbf{w}_n$(四角で囲んだ部分) を挿入したものを挙げる. このウィンドウで覗いた部分の値の和は 0 であり, ウィンドウを平行移動した場合でも変わらないことが確認できる.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 & 0
\end{array}
$$

Fig 11: $\mathbf{b}^1$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Fig 12: $\mathbf{b}^{n-2}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\dots} & \boxed{0} & \boxed{0} & -1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Fig 13: $\mathbf{d}^1$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\dots} & \boxed{0} & \boxed{1} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Fig 14: $\mathbf{d}^n$

## 4.2 $n \equiv 1 \ (mod\, 2)$ の場合

この節では $n$ が奇数の場合について考察する．このとき, $V_1, V_2$ は以下の共通部分空間を持つのであった.

$$V_1 \cap V_2 = < \mathbf{a}(-1,-1) >_{\mathbb{C}} \ . \tag{4.21}$$

このことから, $V_1, V_2$ における $V_1 \cap V_2$ の補空間を $V_1', V_2'$ とすると, 以下の様に表すことができる:

$$V_1' \ = \ < \mathbf{a}(\zeta_{n-1}^k, -1); 1 \leq k \leq n-2, k \neq \frac{n-1}{2} >_{\mathbb{C}}, \tag{4.22}$$

$$V_2' \ = \ < \mathbf{a}(\zeta_{n+1}^l, \zeta_{n+1}^{n+1-l}); 1 \leq l \leq n, l \neq \frac{n+1}{2} >_{\mathbb{C}} \ . \tag{4.23}$$

新たに, アレイ $S_0 = \mathbf{a}(-1,-1) \in V_1 \cap V_2$ と置くことにより, $S_1' = S_1 - S_0$, $S_2' = S_2 - S_0$ とする．それらは以下の様に表される:

$$S_1' \ = \ \sum_{\substack{1 \leq k \leq n-2 \\ k \neq (n-1)/2}} \mathbf{a}(\zeta_{n-1}^k, -1) \in V_1', \tag{4.24}$$

$$S_2' \ = \ \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq (n+1)/2}}^{n} \mathbf{a}(\zeta_{n+1}^l, \zeta_{n+1}^{n+1-l}) \in V_2'. \tag{4.25}$$

このとき, $S_0, S_1', S_2'$ それぞれが, 以下の様な有理化されたアレイとなっている:

$$\begin{array}{ccccccc}
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1
\end{array}$$

Fig 15: $S_0$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 3-n & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 0 & 3-n & 0 \\
0 & n-3 & 0 & -2 & 0 & -2 & \dots & -2 & 0 & n-3 & 0 \\
0 & \boxed{3-n} & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 0 & 3-n & 0 \\
0 & \boxed{n-3} & \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{\dots} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{n-3} & 0 \\
0 & 3-n & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 0 & 3-n & 0
\end{array}
$$

Fig 16: $S_1'$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
-2 & 0 & -2 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & -2 & 0 & n-1 & 0 & -2 & \dots & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\
-2 & \boxed{0} & n-1 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & \boxed{n-1} & \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{\dots} & \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{-2} & 0 & n-1 \\
n-1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 & n-1 & 0
\end{array}
$$

Fig 17: $S_2'$

また, $S_1', S_2'$ から作られる行列のランクを求める為に, 次の補題が有用である:

**Lemma 4.2** 任意の奇数 $m \geq 3$ に対して, 次の様な $(m+1) \times (m+1)$ 行列 $C_m$ を定義する :

$$
C_m = \begin{pmatrix}
m-1 & 0 & -2 & \cdots & 0 & -2 & 0 \\
0 & m-1 & 0 & \cdots & -2 & 0 & -2 \\
-2 & 0 & m-1 & \cdots & 0 & -2 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & -2 & 0 & \cdots & m-1 & 0 & -2 \\
-2 & 0 & -2 & \cdots & 0 & m-1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & \cdots & -2 & 0 & m-1
\end{pmatrix}. \quad (4.26)
$$

この $C_m$ を行基本変形することで, 次の $(m+1)\times(m+1)$ 行列 $D_m$ を得る :

$$D_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

特に, このことから, $rank\ C_m = m-1$ と定まる.

Proof: 前の章で定めた行基本変形の操作の記号を用いて, この $(m+1)\times(m+1)$ 行列 $C_m$ を, まずは以下の様に変形する:

$$E(m,1;-1)E(m{+}1,2;-1)E(m,3;-1)\cdots E(m,m{-}2;-1)E(m{+}1,m{-}1;-1)C_m$$

$$= \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(m+1) & 0 \\ 0 & m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -(m+1) \\ 0 & 0 & m+1 & \cdots & 0 & -(m+1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m+1 & 0 & -(m+1) \\ -2 & 0 & -2 & \cdots & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & -2 & 0 & m-1 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

この行列を $C'_m$ とするとさらに,

$$E(1;1/m{+}1)E(2;1/m{+}1)E(3;1/m{+}1)\cdots E(m{-}2;1/m{+}1)E(m{-}1;1/m{+}1)C'_m$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & \cdots & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & -2 & 0 & m-1 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

となる．この行列を再び $C_m''$ とおくと, さらに変形をすることで以下の式を得る:

$$\begin{aligned} E(1,m;2)E(2,m+1;2)E(3,m;2)\cdots E(m-2,m;2)E(m-1,m+1;2)C_m'' \\ = D_m. \end{aligned} \tag{4.30}$$

以上により, この補題は証明された.□

$S_1'$ の $x$ 軸上の値に注目するとき, $n-1$ を周期とすることが分かる．さらに, $((S_1')_{(i,0)})_{i=0,\cdots,n-2}$ は以下の様になる:

$$u^1 = (n-3, 0, -2, 0, -2, \cdots, 0, -2, 0). \tag{4.31}$$

この $u^1$ を右に 1 つずつ動かしたものを, $u^k = (u^1_{i-k+1})_{i=0,\cdots,n-2} (2 \leq k \leq n-1)$ とする． また, この $u^k (1 \leq k \leq n-1)$ を縦に重ねることで得られる, $(n-1) \times (n-1)$ 行列を $C_{n-2}$ とする．すると, $C_{n-2}$ は以下のように与えられる:

$$C_{n-2} = \begin{pmatrix} n-3 & 0 & -2 & \cdots & 0 & -2 & 0 \\ 0 & n-3 & 0 & \cdots & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & n-3 & \cdots & 0 & -2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & n-3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & \cdots & 0 & n-3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & -2 & 0 & n-3 \end{pmatrix}$$

この行列に, 補題 4.2 の $m = n-2$ の場合を用いると, それは次の様に変形できる:

$$D_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

よって, この行列のランクが $n-3$ となる.

以上の事から, 整数 $k$ $(1 \leq k \leq n-3)$ に対し, $D_{n-2}$ の $k$ 行から作られるアレイ $\mathbf{f}^k \in V_1 - V_1 \cap V_2$ を以下のように定義する:

$$when\ k \equiv 1\,(mod\,2): \quad \mathbf{f}^k_{(i,j)} = \begin{cases} (-1)^j, & i \equiv k-1 \quad (mod\ n-1), \\ (-1)^{j+1}, & i \equiv -2 \quad (mod\ n-1), \\ 0, & i \not\equiv k-1, -2 \quad (mod\ n-1). \end{cases} \tag{4.32}$$

$$when\ k \equiv 0\,(mod\,2): \quad \mathbf{f}^k_{(i,j)} = \begin{cases} (-1)^j, & i \equiv k-1 \quad (mod\ n-1), \\ (-1)^{j+1}, & i \equiv -1 \quad (mod\ n-1), \\ 0, & i \not\equiv k-1, -1 \quad (mod\ n-1). \end{cases} \tag{4.33}$$

$S'_2$ についても同様のことを考えるとき, $(n+1) \times (n+1)$ 行列 $C_n$ に補題 4.2 を用いることで, 行列 $D_n$ を得るとともに, そのランクが $n-1$ である. また,$V_2 - V_1 \cap V_2$ に属するすべてのアレイが, 2 重周期 $\{(n+1, 0), (1, 1)\}$ をもつ. 従って, 整数 $l\,(1 \leq l \leq n-1)$ に対して, $D_n$ の $l$ 行から作られるアレイ $\mathbf{h}^l \in V_2 - V_1 \cap V_2$ は, 以下の様に定義される:

$$when\ l \equiv 1\,(mod\,2): \quad \mathbf{h}^l_{(i,j)} = \begin{cases} 1, & i-j \equiv l-1 \quad (mod\ n+1), \\ -1, & i-j \equiv -2 \quad (mod\ n+1), \\ 0, & i-j \not\equiv l-1, -2 \quad (mod\ n+1). \end{cases} \tag{4.34}$$

$$when\ l \equiv 0\,(mod\,2): \quad \mathbf{h}^l_{(i,j)} = \begin{cases} 1, & i-j \equiv l-1 \quad (mod\ n+1), \\ -1, & i-j \equiv -1 \quad (mod\ n+1), \\ 0, & i-j \not\equiv l-1, -1 \quad (mod\ n+1). \end{cases} \tag{4.35}$$

以上より, $V_1 \cap V_2$, $V_1 - V_1 \cap V_2$, $V_2 - V_1 \cap V_2$ の $\mathbb{Q}$ 基底が得られた:

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 \quad &= < \mathbf{a}(-1,-1) >_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}, \\ V_1 - V_1 \cap V_2 \quad &= < \mathbf{f}^k; 1 \leq k \leq n-3) >_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}, \\ V_2 - V_1 \cap V_2 \quad &= < \mathbf{h}^l; 1 \leq l \leq n-1) >_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}. \end{aligned}$$

これで 4.1 節, 4.2 節の結果を合わせて定理 4.1 の証明が完成した.

例として, アレイ $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^{n-3}, \mathbf{h}^1, \mathbf{h}^{n-1}$ を挙げると, それは以下の様になる:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0
\end{array}
$$

Fig 18: $\mathbf{f}^1$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Fig 19: $\mathbf{f}^{n-3}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\dots} & \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Fig 20: $\mathbf{h}^1$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 \\
-1 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\dots} & \boxed{1} & \boxed{0} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Fig 21: $\mathbf{h}^{n-1}$

以下の節 4.3,4.4 で, $n = 4, 5$ の場合の具体例を挙げる. これは節 4.1,4.2 の一般論の帰結ではあるが, 実はこれらの具体例に見られる著しい特徴こそが, 一般論を生み出す原動力となったのであり, 第 4 章全体の基盤を成す内容である.

## 4.3 $n=4$ の場合

$n=4$ のとき, 特性多項式 $m_{\mathbf{w}_4}$ は

$$m_{\mathbf{w}_4} = 1 + y + x^1 + x^2 + x^3, \tag{4.36}$$

となり, これを計算していくと次の式を得る:

$$(1 + x + x^2)(1 - xy) = 0. \tag{4.37}$$

この式を解くと以下の 6 つの解を得る:

$$\begin{aligned}(x,y) \quad = \quad & (\omega,-1),(\omega^2,-1),\\ & (\zeta_5^1,\zeta_5^4),(\zeta_5^2,\zeta_5^3),(\zeta_5^3,\zeta_5^2),(\zeta_5^4,\zeta_5^1).\end{aligned} \tag{4.38}$$

このとき, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w_4}} = V_1 \oplus V_2$ を満たす $V_1, V_2$ は $V_1 =< \mathbf{a}(\omega,-1), \mathbf{a}(\omega^2,-1) >_{\mathbb{C}}$, $V_2 =< \mathbf{a}(\zeta_5^i, \zeta_5^{5-i}); 1 \leq i \leq 4 >_{\mathbb{C}}$ を得る. また, $n$ が偶数から $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ となるので, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}^0_{\mathbf{w_4}} = \sharp(V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w_4}})) = 6$ と定まる.

例として, アレイ $\mathbf{a}(\omega,-1), \mathbf{a}(\zeta_5^1,\zeta_5^4)$ を挙げると, 以下の様になる:

$$\begin{array}{ccccccc}
\omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega \\
-\omega & -1 & -\omega^2 & -\omega & -1 & -\omega^2 & -\omega \\
\omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega \\
-\omega & -1 & -\omega^2 & -\omega & -1 & -\omega^2 & -\omega
\end{array}$$

Fig 22: $\mathbf{a}(\omega,-1)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\zeta^3 & \zeta^2 & \zeta & 1 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 \\
\zeta^2 & \zeta & 1 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 & \zeta \\
\zeta & 1 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 & \zeta & 1 \\
1 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 & \zeta & 1 & \zeta^4
\end{array}
$$

Fig 23: $\mathbf{a}(\zeta_5^1, \zeta_5^4)$

このとき, アレイ $S_1 = \mathbf{a}(\omega, -1) + \mathbf{a}(\omega^2, -1) \in V_1$ は次の様に表せる:

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\
1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\
-1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\
1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1
\end{array}
$$

Fig 24: $S_1$

同様に, アレイ $S_2 = \mathbf{a}(\zeta_5^1, \zeta_5^4) + \mathbf{a}(\zeta_5^2, \zeta_5^3) + \mathbf{a}(\zeta_5^3, \zeta_5^2) + \mathbf{a}(\zeta_5^4, \zeta_5^1) \in V_2$ も表すと, 以下の様になる:

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\
4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1
\end{array}
$$

Fig 25: $S_2$

このことから, $S_1$ の $x$ 軸上に 1 周期が 3 の並びが見えることから, 行列 $M_1$ は

$$
M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},
$$

となり, 補題 4.1 より, $M_1$ は以下の行列に変形をすることができる:

$$
M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

よって, $M_1$ のランクが 2 と定まり, かつ, $M_1'$ の 1 行目と 2 行目のそれぞれから作られるアレイは以下の様になる:

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Fig 26: $M'$ の 1 行目から作られるアレイ

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1
\end{array}
$$

Fig 27: $M'$ の 2 行目から作られるアレイ

同様に $S_2$ の $x$ 軸上の値の並びから行列を作り, その行列に補題 4.1 を用いることで以下の行列を得る:

$$
M_2 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

よって, $M_2$ のランクが 4 と定まるとともに, 有理数で表された零和アレイを得ることができた. 以上の事から,6 つのアレイの $\mathbb{Q}$ 基底を得ることができた.

## 4.4 $n=5$ の場合

$n=5$ のとき, 特性多項式 $m_{\mathbf{w}_5}$ は

$$m_{\mathbf{w}_5} = 1 + y + x^1 + x^2 + x^3 + x^4, \tag{4.39}$$

となり, 計算を進めることにより, 次の式を得る:

$$(1+x+x^2+x^3)(1-xy) = 0. \tag{4.40}$$

さらにこの式を解くと, 以下の 7 つの解を得る:

$$\begin{aligned}(x,y) &= (-1,-1),(i,-1),(-i,-1)\\ &\quad (\zeta_6^1,\zeta_6^5),(\zeta_6^2,\zeta_6^4),(\zeta_6^3,\zeta_6^3),(\zeta_6^4,\zeta_6^2),(\zeta_6^5,\zeta_6^1),\end{aligned} \tag{4.41}$$

このとき, 重解として $(\zeta_6^3,\zeta_6^3)=(-1,-1)$ をもつ．よって, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_5} = V_1 + V_2$ を満たす $V_1, V_2$ は $V_1 = <\mathbf{a}(i^k,-1); 1 \le k \le 3>_{\mathbb{C}}$, $V_2 = <\mathbf{a}(\zeta_6^l,\zeta_6^{6-l}); 1 \le l \le 5>_{\mathbb{C}}$, $V_1 \cap V_2 = <\mathbf{a}(-1,-1)>_{\mathbb{C}}$ となる．従って, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}^0_{\mathbf{w_5}} = \sharp(V_{\mathbb{T}^2}(m_{\mathbf{w_5}})) = 7$ となる.

以上の事から, 部分空間 $V_1', V_2'$ は以下の様になる:

$$V_1' = <\mathbf{a}(i,-1),\mathbf{a}(-i,-1)>_{\mathbb{C}}, \tag{4.42}$$

$$V_2' = <\mathbf{a}(\zeta_6^n,\zeta_6^{6-n}); 1 \le n \le 5, n \ne 3>_{\mathbb{C}}. \tag{4.43}$$

また, アレイ $\mathbf{a}(-1,-1)$ は

$$\begin{array}{ccccccc}
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1
\end{array}$$

Fig 28: $\mathbf{a}(-1,-1)$

と表せ, これを $S_0 = \mathbf{a}(-1,-1) \in V_1 \cap V_2$ と置くことで, $S_1', S_2'$ は

$$\begin{aligned} S_1' &= S_1 - S_0 \\ &= \mathbf{a}(i,-1) + \mathbf{a}(-i,-1) \in V_1', \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} S_2' &= S_2 - S_0 \\ &= \mathbf{a}(\zeta_6^1,\zeta_6^5) + \mathbf{a}(\zeta_6^2,\zeta_6^4) + \mathbf{a}(\zeta_6^4,\zeta_6^2) + \mathbf{a}(\zeta_6^5,\zeta_6^1) \in V_2'. \end{aligned} \tag{4.45}$$

となり, そのアレイは以下の様になる:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Fig 29: $S_1'$

$$\begin{array}{cccccccc} -2 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Fig 30: $S_2'$

よって, この $S_1'$ の $x$ 軸上の周期に注目し, 行列 $M_1$ を考えるとそれは,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

となる. これに補題 4.2 を用いると $M_1$ は以下の様に変形できる:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以上の事から, $M_1$ のランクが 2 と定まった. また同様のことを $S_2'$ の $x$ 軸上の周期から考え, 補題 4.2 を用いると以下の行列を得る:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このことから, $M_2$ のランクが 4 と定まった.

以上より, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_5}$ の 7 つの $\mathbb{Q}$ 基底を得ることができ, それは, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{w}_5}$ の $\mathbb{Q}$ 基底が 2 つ, $V_2'$ の $\mathbb{Q}$ 基底が 4 つ, そして $V_1 \cap V_2$ の 1 つの $\mathbb{Q}$ 基底となっている.

# References


[1] G. Gündüz, U. Gündüz, The mathematical analysis of the structure of some songs, Physica A, **357**(2005), 565-592.

[2] F.Hazama, Discrete tomography and the Hodge conjecture for certain abelian varieties of CM-type, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci., 82(2006), no. 3, 25-29.

[3] F.Hazama, Discrete tomography and Hodge cycles, Tohoku Math. J., 59(2007), 423-440.

[4] F.Hazama, Discrete Tomography through Distribution Theory, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 44(2008), 1069-1095.

[5] G. T. Herman, A. Kuba (Eds), *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2007.

[6] M. Nivat, Sous-ensembles homogenes de $\mathbf{Z}^2$ et pavage du plan, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), 83-86.

[7] M. Nivat, On a tomographic equivalence between $(0, 1)$-matrices, in *Theory is Forever*, 216-234, Lecture Notes in Comput. Sci. **3113**, Springer, Berlin, 2004.

[8] T.Yashiro, Discrete tomography for the point sequence generated by the adjacent terms of a sequence, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 40(2018), no.4, 461-494.

[9] T.Yashiro and A.Minami, Discrete tomography for L-shaped window, Advances and Applications in Discrete Mathematics, (2018), (to appear).