課題番号	Q18K-01
課題名（和文）	非可換様相部分構造論理の研究
課題名（英文）	non-commutative modal substructural logic
研究代表者	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 数学系列　教授 氏名　近藤 通朗

研究成果の概要（和文）
本研究では，state を写像ではなく，演算子として言語に含む（非可換）剰余束を考察した．state 演算子を様相記号として扱い，state 演算子を持つ非可換な部分構造論理(非可換様相部分構造論理)について，その代数的意味論を展開した．非可換σ-剰余束(L, σ)のσ-filter および prime σ-filter の性質を調べ，σ-filter F や prime σ-filter F による商代数 L/F の構造を決定した．また，これにより非可換様相部分構造論理の完全性定理が得られた．これらについて学術論文 M.Kondo: Some properties of state filters in state residuated lattices, Math. Bohemica （印刷中）として発表した．

研究成果の概要（英文）
In this study, we consider (non-commutative) residuated lattices with a state operator as an operator, not a mapping. The state operator can be considered as a modal operator on a (non-commutative) residuated lattice, an algebraic semantics of (non-commutative) modal substructural logic. We examined the properties of σ-filter and prime σ-filter of (non-commutative) σ-residuated lattice (L, σ) and determined the structure of quotient algebra L / F by σ-filter F and prime σ-filter F. We get the completeness theorem of (non-commutative) modal substructural logic. These results will be published in the Journal “Math. Bohemica” as M. Kondo: Some properties of state filters in state residuated lattices (in press).

1. 研究開始当初の背景

量子力学における観測問題は，Birkhoff, von Neumann により，物理系の確率測度で表現されることが示された．最も重要な量子構造として物理系の閉部分空間全体からなる Hilbert 空間（orthomodular 束）があり，その上の確率測度が観測に対応している．一方，部分構造論理は量子論理，多値論理，ファジイ論理などの様々な論理の統一的な理論展開を目指すものであり，この論理の最も一般的な代数的意味論が剰余束である．1995 年 Mundici により，ファジイ論理の一つである MV 論理（可換 MV 代数）上の確率測度（state）が定義された．その後，BL 代数，MTL 代数などにおいても state の概念が定義され理論が展開されてきた． MV-代数⊆BL-代数⊆MTL-代数⊆（非可換）剰余束

可換剰余束 L において state　s：L→ [0,1]が存在すれば，核 ker(s)は L 上の合同関係となり，商代数 L/ker (s)は可換 **MV 代数**になることを示した．この手法をさらに工夫することで，非可換剰余束に対しても，state s が存在すれば L/ker(s)は**可換MV代数**になることを証明した．その後，[0,1]を剰余束と考えることで，state を写像ではなく，state 演算子 σとして言語に含むσ-剰余

束についての研究が始まった．数理論理学の言葉では，非可換な部分構造論理に様相記号を追加した非可換様相部分構造論理の研究である．

2. 研究の目的

具体的には以下の問題を解決することが本研究の目的である．

(A) 非可換σ-剰余束のσ-filter から作られる関係は合同関係となるか？

(B) normal σ-filter F や prime normalσ-filter F による商代数 L/F の構造を決定すること；

(C) (A),(B)を用いて非可換様相部分構造論理の完全性定理を証明すること．

3. 研究の方法

まず，任意のσ-剰余束は primeσ-filter P による商代数 L/P の subdirect product と同型になることを示し，これを非可換な場合に拡張する．normal
σ-filter と呼ばれるσ-filter を拡張したものが合同関係に対応するかどうか調べる．これらが解決すれば，Lindenbaum-Tarski 代数による手法を用いることが可能となり，非可換様相部分構造論理の完全性定理が証明できる．

4. 研究成果

Ａを非可換様相部分構造論理で証明できない論理式とすると，論理式全体φは，非可換σ-剰余束と見なすことができる．この代数においてＡ≠１となることから，Ａを含まない normal prime σ-filter P が存在する．このとき，この normal prime σ-filter P にΦ上の合同関係θが対応するから，商代数Φ/θは非可換σ-剰余束となり，Ａ/θ≠1/θだから，写像ξ：Φ→Φ/θを考えれば，Ａは真ではないことがわかった．これで完全性定理が証明できた

さらに，もとの非可換σ-剰余束が pre-linearity 条件((x→y) ⊙σ(x→y))v(y→x)⊙σ(y→x))=1 をみたせば，その代数は線形のσ-剰余束の subdirect product と同型になることから，線形のσ-剰余束において論理式が真であることと，対応する論理体系でその論理式が証明可能であることが同値になる．すなわち，強い意味での完全性定理が成り立つことがわかった．他の公理を追加した体系についても同様に考えることができ，（非可換な場合も含む）非常に一般的な様相部分構造論理の代数的手法による完全性定理が得られた．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① M.Kondo: Some properties of state filters in state residuated lattices, Math. Bohemica (in press)

② M.Kondo: Multiplicative derivations and d-filters of commutative residuated lattices, Soft computing (in press)

〔学会発表〕（計　3　件）

① AAA96, 6.1-3.(2018), Darmstadt, Germany

② IJCRS 2019, 6.17-21 (2019), Debrecen, Hungary

③ AAA98, 6.21-23 (2019), Dresden, Germany

等