

# 解答用紙に見られる感想

丸山 彰\*

## Impression to be seen in an answer sheet

MARUYAMA Akira\*

### Abstract

Now I am in charge of Calculus I (repeating course), Probability and Statistics and Complex Analysis in second school of engineering. I let students write the impression of the class on the answer sheet optionally when they took an examination. It is unrelated to the evaluation of the examination, therefore the lesson which they hope for is shown. Students mention Practices and Freedom Problems in an impression, and I generalize it.

キーワード：工学部の数学 授業中の演習 演習レポート 自由課題

**Keywords** : Mathematics of Departments of Engineering, Practices in Class, Practice Reports, Freedom Problems

### 0. 授業形態

基本事項の講義とそれに関する問題演習をやり、学生に随時黒板に解答を書かせる。授業中にとりあげなかった演習問題レポート課題、さらに自由課題として「数学書の感想文」または、「コンピューターによるレポート」で文化としての数学にふれる機会をもうける。学力考査は最後の授業に例題の解説をしたあとで実施する。授業中の演習を生かすために自筆ノートの参考を認める。

### 1. 確率統計 電気工学科 機械工学科 3 年次 テーマ・内容

第 1 回～第 3 回 復元抽出、標本空間の図表示、和事象、余事象、積事象の確率  
第 4 回～第 8 回 事象の独立性、条件つき確率  
第 9 回～第 12 回 確率分布の平均と分散

第 13 回～第 14 回 2 項分布 3 項分布

確率統計は高校までにも学習してはいるが、他の項目と入れ替わりにとりあげられていて学習済みの項目との連絡がとりにくいことで、授業では「袋の中の 10 個の球の復元抽出」に限定して標本空間、事象、確率という展開をとった。復元抽出 2 回の場合、標本空間をタテヨコ 10 個の百マスに表示して事象はその中の部分集合として考えて、和事象、積事象、ド・モルガンの法則を視覚的に把握できるようにした(図 1)。これは算数学習で数量をタイルで図表示した「水道方式」をヒントにしたものである。高校で学習した解法とちがうために、はじめは戸惑った人もいたように思うが確率の学習で一番理解しにくい独立事象と条件付き確率については、この考え方で使い分けられるように試みた。実社会への応用と

\*工学部数学系列 非常勤講師 Part-time Lecturer, Department of Mathematics, School of Engineering

しては標本調査における無作為抽出について巨大な母集団(例 年齢別人口)と比較的少ないデータ(例 クラスの学生の身長や体重)とでは扱い方が異なることを数学的に考察する。野球でヒットを打つ確率と打率のちがいや、じゃんけんで勝負のつく確率などの身近の問題に同様の確率の考え方が適用できることを見ていく。

## 解答用紙に見られる感想

### ○今までの確率の学習と比べて

2019年度 「今まで学んできた確率とはまったく違う形で確率を求めることができるようになったため確率の幅が広がった。統計も学んだので自分のできることの幅がひろがった。」

2018年度 「確率統計が一番好きな分野で中学高校で学習していたが、解き方の表現が違ってあらためて確率の面白さを学んだ。」「高校のとき苦手だった確率統計、条件つき確率は全く意味がわからなかったが、今回学んだことでしっかり理解し復習できた(図2)。」

2017年度 「新しく学んだ計算法があるのに今まで知識で解いてしまうことが多かった。」

2016年度 「高校で数A履修していなかったので最初は非常に苦戦した。統計力学が最強の学問であるといわれるので確率統計に強くなりたい。」「少しチャレンジしてみようという気になった。最近確率漸化式の問題が面白くこればかり解いている。」

2015年度 「小中高と少しずつ確率のことがわかっていき解き方がひとつでないこと。質問と正反対の確率から答えを導くことに確率の面白さを感じた。」

### ○確率学習の有用性

2019年 「機械設計や情報の分析には、この分野と切りはなすことができません。ボードゲーム等の中には確率が計算できると勝率が上がるものがあるので知っていて損はないかと思った。」「自由課題で『都道府県別自動車保有台数』について調べたとき確率や統計を使うと簡単に数値としてデータが確認できて楽しく理解を深めることができました。」「図を理解した上で問題を解く事で理解を深めることができた。」「品質管理の授業と通ずるところが

あり深く統計を学べてうれしかったです。」

2018年度 「確率の基礎をよく学べた。特に平均と分散は実験でも使うので理解できてよかった。」「黒、白、赤の球を使った説明わかりやすかった。条件をころころ変えずに講義をしていたのですぐに理解できた(参考1)。「確率統計は生活やビジネスで使われていることを講義や自由課題『日本の労働人口のデータ』で学んだ。来年就職して個体のばらつきなど積極的に確率統計の知識を生かしたい。」

2017年度 「自分の意識したのと逆の答えが返ってくるのが確率統計。」「計算力も重要だが事象等の専門用語も難しかった。」「場合によって何を求めるかを見極めることが大事だと思った。」

2016年度 「身近に確率統計は沢山あり自由課題『東京23区の人口密度』以外でも自分で調べて計算してみたいと思った。」「『同じ誕生日の人が教室にいる確率』等、計算してみると思ったより確率が高いことがわりあいにあるんだと感じた(図3)。「自由課題で山本誠志『統計がわかる本』(Gakken)を読んだ。初めて教科書以外の数学書を読み案外面白い内容であったため、この授業をうけた。」「平均と分散の知識を実験と実習に役立てることができそう。」「課題のレポート『常磐線各駅の利用者数』を通じ世の中のさまざまな確率を出すとともに統計に関することも行なえた。」

2015年度 「実験レポートのデータ処理に必要なし会社員になったら統計データの作成も頼まれる可能性も高い。」「単金(注1)でも確率を使えそう。」「経営システム工学志望だった。野球の打率、出塁率などから理想の打線を考えるなどの応用できると思ったが、それには及ばなかった(参考2)。「身近な『くじ』を例として教えて下さったので他の事例に応用したい。」

### 感想記入者の成績

平均点(人数) 上:記入者 下:無記入者

2019	2018	2017	2016	2015
78.71 (21)	79.86 (22)	75.8 (19)	79.2 (18)	81.2 (23)
84.5 (22)	74.9 (15)	75.25 (8)	90.2 (9)	74.1 (11)

## 参考 1 試験問題例 2019 年度

黒球 4 個、白球 2 個、赤球 6 個が袋に入っている。これから 1 球ずつ 6 回取り出す。球はその都度元に戻すものとする。黒球 2 回、白球 1 回、赤球 3 回出る確率を求めよ。

## 参考 2. 授業でとりあげた例題 野球の打率と出塁率の関係

野球の打者、ヒットを打つ確率は 10 打席中 3 本、凡退する確率は 5 回、四死球で出塁する確率は 2 回とする。この打者の打率は「A: ヒットを打つ B: 四死球で出塁する」としたときの条件つき確率で

$$P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{8}{10} \quad \text{により} \quad P(A|B) = \frac{3}{8} = 0.375$$

となる。 $r$  打数で  $k$  本のヒットが出る確率の分布を求めると

$${}_r C_k \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{r-k}$$

**概評** 確率統計は日常生活でも馴染み深いものなので自由課題でも様々のデータが取り上げられていて学生がどのようなデータに関心があるかがうかがえる。ただし多くのデータはいくつかの確率分布の複合したものが多いので。授業ではプリミティブなデータについての統計処理とその解釈をもとに自分がまとめたデータの分析の一助になることを期待する。同じ誕生日の人がクラスにいる確率の問題はよく自由課題でもとりあげられる(図 3)。毎年履修学生の誕生日の調査をしているが、2019 年度は同じ誕生日の人が二組あった。その他、サイコロやじゃんけんなど実際に実施してデータをまとめた人もいた。

「品質管理」の授業でも標本調査が出てくるようだが復元抽出と非復元抽出の違いが明確でないので復元抽出を中心に非復元抽出は条件つき確率として展開した。

## 2. 微分積分学 I 再履修 全学科 2 年次 テーマ・内容

第 1 回～第 4 回 微分係数、接線の方程式、和差積商の微分公式 合成関数の微分法、累乗根の導関数

第 5 回～第 8 回 三角関数と導関数 ネイピア数、指数関数と対数関数の導関数

第 9 回～第 10 回 原始関数、不定積分、定積分

## 第 11 回～第 13 回 置換積分 部分積分法

## 第 14 回 面積と体積

1 年次の微分積分学 I の再履修クラスで、二コマ続けての授業で演習問題のプリントを配布して解答を黒板に書かせている。二回目なので微分については関数のグラフの接線の方程式を求め、それを手がかかりにグラフを描くことで微分の有用性を認識させる。自由課題でもパソコンを用いてグラフを描かせるレポートが提出されることもあった(図 3)。

## 解答用紙に見られる感想

### ○今までの授業と比べて

2019 年度 「高校で受けた授業の復習ができたし新しいことを学ぶ分野もあったのでとても新鮮味のある授業で楽しかったです。」「式を見て公式を当てはめればよいのか判断が難しく感じた。」

2018 年度 「一年のときに解けなかった問題も少しは解けて理解ができるようになりました。」

2017 年度 「今まで苦手意識をずっと持っていたが改めて学びなおしてみると難しく考えすぎていることに気付いた。」

2016 年度 「前回よりはるかにわかりやすかった。プリントの演習の解答も板書で書いて自分でたしかめることができた。」「理解するまでに時間がかかり理解できているのか不安になる内容が後半増えてゆき今後のためにも微分積分の見直しが必要だと感じた。」

2015 年度 「高校の時あまり微積やらないで大学では周りを取り残されたが納得のいく解答が出せてよかった。」「高校の復習だった。後期難しくなるために予習しておく。」

### ○各項目について

2019 年度 「実験や他の授業で微積を用いるようになったので理解が深まったようにみえる。」「微分法はようやくわかったが部分積分はまだよくわかっていない。」「微積 I で微分積分の計算のしかたをさらに学ぶことができた。定積分の部分積分や三角関数の問題がムズカシイため活用できるように頑張りたい。」

2018 年度 「公式の導入などの意味が理解できてわかりやすかった。演習の時間多く記憶にとっても残

りました。」

**2017年度**  $\sin, \cos, \tan$  や $e$ の形が出てくると苦手意識がありまだできないところが沢山あったことに気付いた。「指数関数の積分のときに指数の扱いに気を付けなければならないのがとても面倒だった。」「置換積分や部分積分等さまざまな積分法を学んだ。他の授業に役に立てたい。」

**2016年度** 「自分の苦手な部分や理解の浅い部分等を知れた。 $\sin^3 x, \sec x, \operatorname{cosec} x, \cot x$  の導関数等の知識が得られた(注2)。」

**2015年度** 「積分の方が難しい。置換積分、部分積分、累乗根などの解き方の複雑さが面白かった。」  
「面積体積を計算する終盤の問題はやりがいがあった。」

### ○授業中の演習、自由課題、レポートについて

**2019年度** 「授業ペースがゆっくりで講師の方が一人一人に丁寧に教えてくれるのでつまずくところがあってもすぐ理解できたためとても有意義な講義であったと感じる。」

**2018年度** 「自由課題『数の悪魔—算数・数学が楽しくなる12夜(H.M.エンツェンスベルガー)』で数学以外の数学にふれることもできたのはとてもありがたかった。」「30年ぶりの微積分でしたが何とか授業についていけました。」

**2017年度** 「仕事の都合であまり授業にでられなかった。あらためて先生の講義を見たら解答の仕方を細かく書いていてわかりやすかった。」「わかりやすくまとめていただいて以前より理解が深まった。」

**2016年度** 「丸山先生のご指導はとても手厚く安心して授業を受けられる。特に机間指導を細かくいってくださり明確な助言をいただくことで理解もしやすかったです。」

**2015年度** 「先生からヒントをもらい考えながら解けたときはうれしかった。」「少し解けるようになって微積が身近に感じられるようになった。自由課題で『微分積分を楽しむ本』(今野紀雄:桜の開花予想を積算温度を使い積分で出していたり自動車のスピードメーターの速度の出し方などが出ている)を読んだのが面白かった。」

### 感想記入者の成績

平均点(人数) 上:記入者 下:無記入者

2019	2018	2017	2016	2015
76.8 (13)	82.6 (13)	75.2 (13)	80.6 (19)	84.5 (17)
82 (12)	70 (4)	68.4 (19)	53.3 (7)	85 (3)

### 参考3. 試験問題例

$$y = \frac{e^{2x}}{\sin x + \cos x} \quad \text{を微分せよ}$$

**概評** 再履修生のクラスだが1年次になぜ単位とれなかったのか不思議なくらいに学力のある学生がいることは、3年次に確率統計、複素解析学を履修する学生が1/3程いたが成績上位の人もいることだろうか。その一方で高校数学からやり直した方がいいと思われる学生がいるので、クラスの人数がそれほど多くないことでできるかぎり個別の対応をとっている。授業中の演習で全員に黒板に解答を書かせることで、数学の授業への積極的な姿勢をうながすようにした。その他、関数電卓やスマホの電卓を用いて数列  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  を求めることで、極限がネイピア数 $e$ であることを確かめさせて実験科目での使用の注意すべき点を明らかにした。

### 3.複素解析学 全学科 3年次

#### テーマ・内容

第1回～第3回 複素数、複素平面、極形式

第4回～第8回 複素比例関数、複素1次関数の写像と不動点、相似変換の中心

第9回～第11回 複素累乗関数 扇形の像 複素共役関数の写像

第12回～第14回 正則関数、コーシー・リーマンの方程式、複素指数関数と複素三角関数

3年次に履修する科目で、電気回路や制御工学で盛んに使用される。複素数は複素平面上の点として表示されるので複素関数は実関数のようにグラフをとおして特徴をつかむことができないため写像を導入した。基本図形として原点を頂点とする二等辺直角三角形と扇形をもとに複素関数の写像による像図形を考察する(参考文献5)。様々な例題をとおして写像の等角性を確認する。授業では計算もさること

ながら図形表示を演習でも多くとりあげた。また微積で取り上げられる指数関数、三角関数を複素数に拡張することで見通しがよくなる。オイラーの公式はこれを記号として借用したものとして交流回路でのインピーダンスの計算などに使用される。授業ではその理論的な基礎付けを展開する。

## 解答用紙に見られる感想

### ○複素数とのあい

**2018年度** 「複素数の累乗や像図形など幅広く複素数の世界を知ることができてとても楽しかった。」

「今までにやった複素数に加え新しく扇形での図示(参考4、図4)やコーシー・リーマンの関係式から求める複素導関数など広く学べてよかった。他の科目の学習に役立った。」「極形式について極座標のイメージがわかった。」「複素数を学んで回路の計算ができるようになった。」

**2017年度** 「 $i$ が出てきて計算が難しそうと思ったが色々な公式を利用して簡単になり問題を解くのが楽しくなってきた。」「虚数がなぜ必要なのかあまりよくわかっていなかったが、座標として図形の拡大や移動、反転に必要なだと考えるとよく理解できるようになった。」「この学問で得た知識を実験科目に生かしたい。」

**2016年度** 「複素解析学で三角関数、微分積分、極形式の復習ができた。」「複素解析に関する様々な計算方法を学んだ。」「複素数を使って関数の計算を行う時の計算の仕方を学ぶことができたので、とても役に立つだろうと思う。」「高専のときに一度やっていたので理解していてよい復習になった。」

**2015年度** 「複素解析学は電子工学のフェザー表示で用いられるためそれについての理解が深まった。」「 $\sin$  や  $\cos$  などに強くなった気がする。今後も活用したい。」「複素数交流回路で学んでいたのが苦にならなかった。大きさと角度を求めて表現でき、とても便利である。」「色々な定理により像の回転や平行移動すること、面白いと思った。この移動がどのように使われているかを知りたいと思った。」「高校の時に学んだことを思い出した。制御工学に役に立ついい機会だった。」

**2014年度** 「ふだん電気の時しか使わないが扇形や色々な図形まで表せることがわかり面白かった。」

「複素数を使用すれば扇形図形が求められるということを知った。」「複素数の累乗で関数電卓を使わずに求められることを知った。」

## ○授業、演習、レポートについて

**2018年度** 「講義でさまざまな関数について学ぶことができた。不動点がどのようなものか理解できなかったが図で示すと、とても分かりやすかったので大変勉強になった(注3、図5)。」「数学的な操作と図表示を常に対応させることで複素解析の初歩を感覚的に理解することができた。」「今回の講義では図による解法を多く学び今までとは違う解き方で問題を解けた。」「他の科目で習った部分もあ

り復習になった。はじめての部分も説明わかりやすく容易に理解できた。授業内で多くの例題と問題を解く機会があり理解を深められた。」

**2017年度** 「高校でやらなかった分野なので少し不安でしたが基本から教えてもらったのでよく理解することができた。」

**2016年度** 「少し複雑だったが実習を行い理解を深められたと思う。」「理解が大変そうだったと思うが演習を解いてみて思ったよりしっかり理解ができるようになったと思う。」「電卓なしの計算は結構大変でした。」「自由課題『数学を志す人に(岡潔)』の読書がよかった。」

**2015年度** 「非常にためになった。黒板で演習をやるのは結局一度しかやれなかった。」「また機会があったら私に当ててください。」

**2014年度** 「難しい場面がいくつかあったが問題を複数回やったのである程度ついていけた。」「中学高校の数学をつなぎあわせて問題を解くのも面白いが新しいことを学ぶことも面白かった。もっと先の複素数について学びたい。」

## 感想記入者の成績

平均点(人数) 上:記入者 下:無記入者

2018	2017	2016	2015	2014
88.8 (25)	86.1 (24)	84.8 (26)	73.7 (22)	70.8 (23)
89.7 (15)	77.5 (16)	90.6 (14)	81.2 (21)	81.7 (32)

参考4 演習問題例

関数  $w = f(z) = z^2$  による扇形  $\begin{cases} 0 \leq |z| \leq 1 \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$  の像図形を求めよ。また元の扇形と像の扇形を図示せよ(図4)。

**概評** 複素数についてこれまでは二次方程式の虚数解、その応用としてバネ振動の微分方程式の一般解、そして交流回路のインピーダンスの計算などが個別に取り上げられていたので、複素解析学についてなかなかイメージがつかないようだった。授業ではこれまで学んだ数学との関係、おもに平面図形の変換に関するもの、特に回転について重点的に取り扱った。微積分で出てくる三角関数の諸公式もその都度復習し演習問題にとりこんだ。特に偏角について一般角に拡張した場合の図表示にてこずっている様子がかがえた。普段コピーやパソコンで画像処理をするさいに不動点を調べることに役にたつことを理解させる。また工学でよく出てくるオイラーの公式について、複素関数の微分方程式の解として三角関数もあわせて導くことで理論的な保証を与える事を示す。自由課題では、授業中に取り上げた複素一次関数の写像をパソコンで描かせたレポートも見られた(図6)。

4.総括

感想記入者と無記入者とで成績に関する相関関係はデータからいって見られない。科目によっては無記入の方が成績よかった場合もある。アンケートと対照させたとき授業に不満をいだいた学生は感想を記入しない傾向はあるが、答案感想にもかかわらず severe な声も見られた。自由課題の提出は試験の点数が不足な場合に加点することをあらかじめシラバスで通知しているが、ねらいは教科としての数学でなく教養としての数学、または実用としての数学を履修の合間に体験することにある。どの科目も専門科目への応用についての期待があるが、実際にはそれ以前の基礎が不備などところがあることでリメディアルが多くなる傾向がある。

2年前までは日本大学理工学部船橋校舎と東海大学湘南校舎工学部の1~2年の数学科目も担当していて、試験の解答用紙に感想を書かせていた。授業評価と試験データの分析と自由課題についてまとめ

たことがある(参考文献8.9)。

最後に工学部の数学について、学科ごとに重点の置き方が異なると見られるので、各学科の先生方と意見交換をする機会を設けることを志望する。

脚注

- 注1: 単位時間あたりの業務の金額のこと。
- 注2  $\sec x, \operatorname{cosec} x, \cot x$  は現在高校数学では取り扱わないが、古い教科書や工学では時々でてくるので説明する。問題解答には使用を要求していない。
- 注3  $f(z_0) = z_0$  となる  $z_0$ (図5)。

参考文献 授業で紹介した教材 参考書

1. フェラー 「確率論とその応用上」(紀伊国屋書店)
2. 石原・浅野「理工系入門 微積分分」
3. 石村園子「大学新入生のための微積分入門」(共立出版)
4. 大村平 「微積分のはなし上、下」 (日科技連):
5. T. ニーダム「ヴィジュアル複素解析」(倍風館)
6. 遠藤雅守「理系人のための関数電卓パーフェクトガイド」(とりの書房)

大学教育に関して

7. 丸山 彰「学生による授業評価の着眼点」数学教育学会研究紀要 2000 年秋
8. 丸山 彰「学力評価の多面性」数学教育学会研究紀要 2001 年春
9. 丸山 彰 自由課題に学ぶ(数学書の感想文とパソコン) 研究資料集11 東海大学教育研究所編 2003 年
10. 日本数学会・大学数学基礎紀要WG 教授法研究所「大学での数学の教え方いろいろ」

プリントと自由課題に取り上げられた図

図1 標本図 縦1回目 横2回目

	$E_i$	$F_i$	$G_i$
$E_i$	(黒, 黒)	(黒, 白)	(黒, 赤)
$F_i$	(白, 黒)	(白, 白)	(白, 赤)
$G_i$	(赤, 黒)	(赤, 白)	(赤, 赤)

図2 条件つき確率の図表示

A: 異なる色の球が出る B: 1回も赤球が出ない

$$P(A) = \frac{62}{100} \quad P(A \cap B) = \frac{12}{100} \quad P(B|A) = \frac{6}{31}$$

事象は余事象を塗りつぶして余白で表示

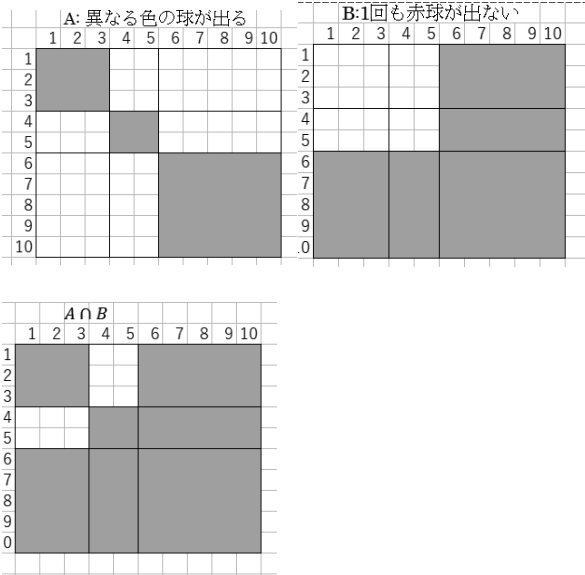
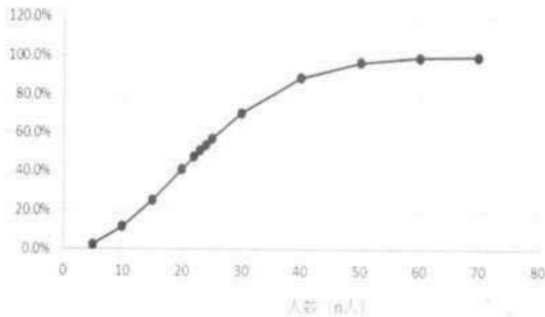


図3 自由課題より クラスに同じ誕生日の人がいる確率



「結果は、23人を超えた段階でその確率は50%を超え、70人に達せばほぼ100%の確率で対象の二人組が存在することがわかった。」

図4 関数  $w = f(z) = z^2$  による扇形の像  
原像 像図形

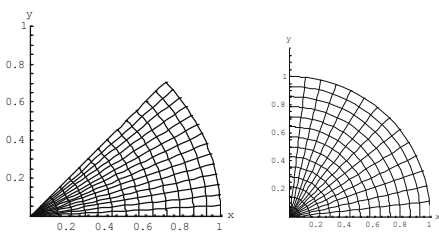


図5  $f(z) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}z + 2+i$  の不動点は

$$z_0 = \frac{3-\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-1)i}{2}$$

三点  $O(0), E(1), I(i)$  を頂点とする  $\triangle OEI$  の像は不動点  $F(z_0)$  中心に  $\frac{3\pi}{4}$  回転した  $\triangle BE''I''$  である。

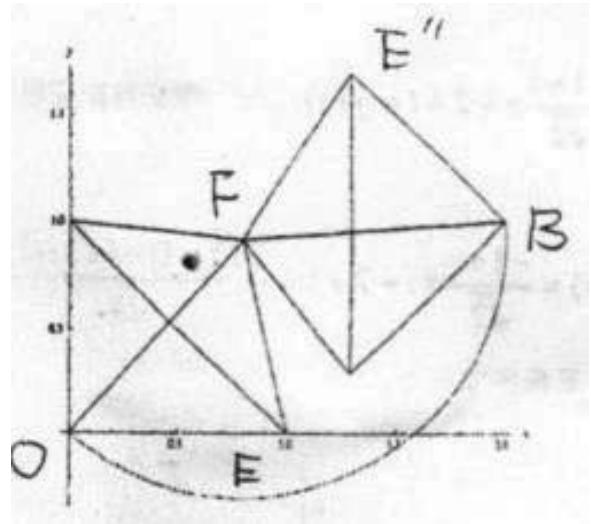
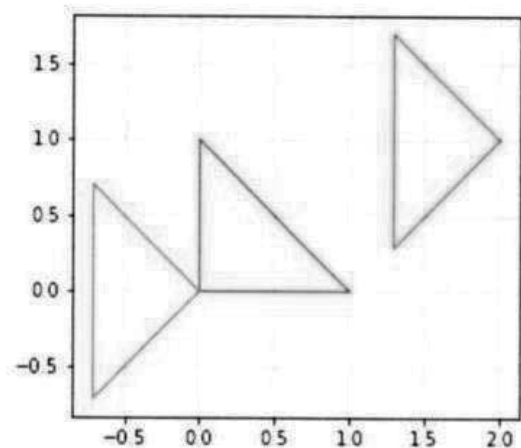


図6 自由課題より

$\triangle OEI$  の像は原点  $O$  中心に  $\frac{3\pi}{4}$  回転し  $2+i$  平行移動した  $\triangle BE''I''$  である。Python 使用



「数学計算では matlab や mathematica などがあるが、そういった専用の数値計算ソフトウェアでなくとも、一般のプログラミング言語の拡張機能やライブラリーで簡単な複素計算、複素平面上の描写が可能であることが今回示すことができた。」